DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ
DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul IV, nr. 8 / 2021

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Comitetul de redacție:

Eduard ASADURIAN	Tudor BĂLĂNESCU
Costel BĂLCĂU - redactor șef	
Loredana BĂLILESCU	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Maria-Crina DIACONU	Ionuț DINCĂ
Mihaela DUMITRACHE	Mihai Armand IONESCU
Florentin IPATE	Constantin GEORGESCU
Raluca Mihaela GEORGESCU	Camelia GHELDIU
Marius MACARIE	Maria MIROIU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Nicolae-Doru STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacția: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul IV, Nr. 8, Decembrie 2021

Cuprins

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 5

T. Zvonaru, B.M. Ioniță

Leme și inegalități 5

M. Bencze

About Brocard point in a triangle 11

R.I. Bălilescu

Functions preserving limits of subsequences 14

L.M. Giugiuc, C. Mateescu

On the bounds of a product involving cosines 18

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 31

R.I. Mihai

A note on the properties of Fibonacci trees' leaves 31

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI 35

D.A. Popescu, M.A. Covas

Algoritmi de rezolvare a unei categorii de ecuații diofantice cu restricții 35

RUBRICA DE ROBOTICĂ 43

D.A. Popescu

Elemente de interfață specifice mediului grafic interactiv Scratch 43

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 49

Teste pentru examenul de Evaluare Națională 49

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 59

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 64

Teste pentru admiterea la facultate 70

Teste grilă pentru admiterea la facultate 73

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 77

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 77

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 80

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 85

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 6 85

Probleme propuse pentru liceu 98

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 102
Probleme propuse 102

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Leme și inegalități

Titu Zvonaru[1] *și Bogdan-Marius Ioniță*[2]

Scopul acestei note este acela de a prezenta unele rezultate simple, care sunt utile pentru soluționarea unor inegalități, condiționate sau nu. În afara inegalităților clasice, este util ca un rezolvitor nu foarte experimentat să aibă la dispoziție câteva idei de abordare pentru unele probleme ce apar în reviste sau concursuri.

Începem cu două identități care se vor dovedi utile în rezolvarea unor inegalități condiționate.

Lema 1. *Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a + b + c = 1$, atunci avem relația: $(a + b)(a + c) = a + bc$.*

Demonstraţie. $(a + b)(a + c) = a^2 + ac + ba + bc = a(a + b + c) + bc = a + bc$. □

Lema 2. *Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $ab + bc + ca = 1$, atunci avem relațiile: $a^2 + 1 = (a + b)(a + c)$, $b^2 + 1 = (b + a)(b + c)$, $c^2 + 1 = (c + a)(c + b)$.*

Demonstraţie. $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(b + a) = (a + b)(a + c)$. □

Deși este bine cunoscută inegalitatea generală, vom folosi următoarele cazuri particulare ale inegalității lui Cauchy - Buniakovski - Schwarz:

Lema 3. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci avem inegalitatea: $\sqrt{(a + b)(a + c)} \geq a + \sqrt{bc}$. Pentru $a + b + c = 1$, ultima inegalitate se poate scrie $\sqrt{a + bc} \geq a + \sqrt{bc}$.*

Lema 4. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci avem inegalitatea: $\sqrt{(a + b)(a + c)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$.*

Lema 5. *Dacă a, b, c, x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci este adevărată inegalitatea:*

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} \leq \sqrt{(a + b + c)(x + y + z)}.$$

Prezentăm alte inegalități utile de reținut, a căror demonstrație o lăsăm cititorilor.

Lema 6. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci $(a + 2b)(a + 2c) \leq (a + b + c)^2$.*

Lema 7. *Pentru numerele reale pozitive a, b este adevărată inegalitatea: $\sqrt{1 + a} + \sqrt{1 + b} \geq 1 + \sqrt{1 + a + b}$.*

[1]Comănești, tzvonaru@yahoo.com
[2]București, cilibimoise@hotmail.com

Lema 8. *Pentru a, b numere reale pozitive, avem inegalitatea:* $(1+a^2)(1+b^2) \geq (1+ab)^2$.

Lema 9. *Pentru a, b numere reale pozitive, avem inegalitatea:* $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geq \dfrac{1}{1+ab}$.

Prezentăm în continuare câteva probleme propuse la diferite concursuri sau reviste, pentru care lemele de mai sus își vor dovedi utilitatea.

Aplicația 1. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} \leq 2.$$

Olimpiada Mexic, 2007

Soluție. Aplicând Lema 1 și inegalitatea mediilor, avem:

$$\sqrt{ab+c} + \sqrt{bc+a} + \sqrt{ca+b} = \sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}$$
$$\leq \frac{a+b+a+c+b+a+b+c+c+a+c+b}{2} = 2.$$

Aplicația 2. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{c}{\sqrt{c+ab}} + \frac{a}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{3}{2}.$$

Kostas Geronikolas, Romanian Mathematical Magazine

Soluție. Folosind Lema 1 și inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{c}{\sqrt{c+ab}} + \frac{a}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b}{\sqrt{b+ca}} = \sqrt{\frac{c\cdot c}{(a+c)(b+c)}} + \sqrt{\frac{a\cdot a}{(b+a)(c+a)}} + \sqrt{\frac{b\cdot b}{(b+a)(c+b)}}$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} + \frac{b}{b+a}\right) = \frac{3}{2}.$$

Egalitatea are loc atunci când $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Aplicația 3. *Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x+y+z=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{1}{\sqrt{x+yz}} + \frac{1}{\sqrt{y+zx}} + \frac{1}{\sqrt{z+xy}} \geq \frac{9}{2}.$$

Soluție. Aplicând Lema 1, inegalitatea mediilor și Lema 5, obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{x+yz}} + \frac{1}{\sqrt{y+zx}} + \frac{1}{\sqrt{z+xy}} = \frac{1}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{1}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{1}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}$$
$$\geq \frac{9}{\sqrt{(x+y)(z+x)} + \sqrt{(y+z)(x+y)} + \sqrt{(z+x)(y+z)}}$$
$$\geq \frac{9}{\sqrt{(x+y+y+z+z+x)(z+x+x+y+y+z)}} = \frac{9}{2}$$

Aplicația 4. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\leq\frac{3}{2}.$$

Open Olympiad of FML No 239, Rusia

Soluție. Folosind Lema 1 și inegalitatea mediilor, obținem:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{a}{b+a}\right)=\frac{3}{2}.$$

Aplicația 5. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}\geq 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Olimpiada Ucraina, 2004

Soluție. Aplicând Lema 1 și Lema 3 avem:

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}=\sqrt{(a+c)(b+c)}+\sqrt{(b+a)(c+a)}+\sqrt{(b+a)(c+b)}$$

$$\geq a+\sqrt{bc}+b+\sqrt{ca}+c+\sqrt{ab}=1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Aplicația 6. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\geq\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

APMO, 2002

Soluție. Prin simplificare cu termenul $\sqrt{abc}$, inegalitatea de demonstrat devine

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}\geq\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{ac}}\geq 1+\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ac}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}.$$

Folosind următoarele substituții $\frac{1}{a}=x,\ \frac{1}{b}=y\ ,\frac{1}{c}=z$, inegalitatea de demonstrat devine:

Fie x, y, z numere pozitive astfel încât $x+y+z=1$, atunci avem următoarea inegalitate: $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geq 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$ care este Aplicația 5.

Aplicația 7. *Fie x, y, z numere reale pozitive, atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1.$$

Walther Janous, Crux Mathematicorum, Vol. 17, Nr. 6 (Iunie, 1991)

Soluție. Conform Lemei 4 avem:

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}$$
$$\leq \frac{x}{x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}+\frac{y}{y+\sqrt{yx}+\sqrt{yz}}+\frac{z}{z+\sqrt{zx}+\sqrt{zy}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=1.$$

Aplicația 8. *Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $ab+bc+ca=1$, atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\leq\frac{3}{2}.$$

Soluție. Conform Lemei 2 și Aplicației 2 avem:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq\frac{3}{2}.$$

Aplicația 9. *Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=abc$, atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq\frac{3}{2}.$$

Olimpiada Coreea de Sud, 1998

Soluție. Aplicând substituțiile $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ condiția $a+b+c=abc$ devine $xy+yz+zx=1$, iar inegalitatea de demonstrat devine: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\leq\frac{3}{2}$, care este adevărată conform Lemei 2 și Aplicației 2.

Aplicația 10. *Fie a, b, c numere reale pozitive atunci avem inegalitatea:*

$$\frac{x^2}{(x+2y)(x+2z)}+\frac{y^2}{(y+2z)(y+2x)}+\frac{z^2}{(z+2x)(z+2y)}\geq\frac{1}{3}.$$

Petre Bătrânețu, GM 3/2012

Soluție. Aplicând Lema 6 avem

$$\frac{x^2}{(x+2y)(x+2z)}+\frac{y^2}{(y+2z)(y+2x)}+\frac{z^2}{(z+2x)(z+2y)}$$
$$\geq\frac{x^2}{(x+y+z)^2}+\frac{y^2}{(x+y+z)^2}+\frac{z^2}{(x+y+z)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}.$$

Trebuie demonstrată inegalitatea

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz\ \ (1),$$

care este cunoscută.

Aplicația 11. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$, să se demonstreze inegalitatea:*

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\geq\sqrt{5}+2.$$

Cosmin Pohoață, Mathematical Reflections Nr. 5, 2014

Soluție. Aplicând Lema 7 avem $\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c}\geq 1+\sqrt{1+4a+4b}+\sqrt{1+4c}\geq 1+1+\sqrt{1+4a+4b+4c}=2+\sqrt{1+4\left(a+b+c\right)}=2+\sqrt{1+4}=2+\sqrt{5}$.

Aplicația 12. *Să se demonstreze că dacă $x, y, z\geq 1$ și $n\geq 1$ număr real astfel încât $x^2+y^2+z^2=n^2+2$, atunci este adevărată inegalitatea: $x+y+z\geq n+2$.*

Soluție. Folosind Lema 7, obținem

$$x+y+z=\sqrt{1+x^2-1}+\sqrt{1+y^2-1}+\sqrt{1+z^2-1}\geq 1+\sqrt{1+x^2-1+y^2-1}+\sqrt{1+z^2-1}$$

$$\geq 1+1+\sqrt{1+x^2+y^2-2+z^2-1}=2+n.$$

Aplicația 13. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $ab+bc+ca=1$. Demonstrați că*

$$\frac{ab}{\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}}+\frac{bc}{\sqrt{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}}+\frac{ca}{\sqrt{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}}\leq\frac{3}{4}.$$

RMT Nr. 3, 2012

Soluție. Aplicând Lema 8 este suficient să demonstrăm că

$$\frac{ab}{1+ab}+\frac{bc}{1+bc}+\frac{ca}{1+ca}\leq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1+ab-1}{1+ab}+\frac{1+bc-1}{1+bc}+\frac{1+ca-1}{1+ca}\leq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{9}{4}.$$

Aplicând inegalitățile mediilor avem $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{9}{3+ab+bc+ca}=\frac{9}{4}$.

Aplicația 14. *Fie x, y numere reale pozitive, atunci să se demonstreze inegalitatea:*

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\frac{2}{x+y+2}.$$

Olimpiadă națională Indonezia, 2008

Soluție. Aplicând Lema 9 avem $\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\frac{1}{1+\sqrt{xy}}$.

Este suficient să arătăm că $\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\geq\frac{2}{x+y+2}\Leftrightarrow x+y+2\geq 2+2\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$, adevărată.

Bibliografie

[1] R.B. Manfrino, J.A.G. Ortega, R.V. Delgado, *Inequalities, A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[2] S. Riasat, *Basics of Olympiad Inequalities*, Preprint, 2008.

[3] T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, Volume 1, Editura Gil, Zalău, 2004.

[4] Colecția Revistei de Matematică din Timișoara - RMT.

[5] Colecția Crux Mathematicorum.

About Brocard point in a triangle

Mihály Bencze [1]

In this paper we present some geometrical inequalities related to the Brocard point in a triangle.

Definition 1. *In any triangle ABC there exists a unique point P for each $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \omega$. The point P is the Brocard point, they are named after Henri Brocard (1845-1922), a French mathematician.*

This point P is called the first Brocard point, and ω the Brocard angle.

Theorem 1. *(Brocard). In any triangle ABC holds the identity:*

$$\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

Proof. The given relation is equivalent to $\sin(A-\omega)\cdot\sin(B-\omega)\cdot\sin(C-\omega) = \sin^3\omega$. But we have $\dfrac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega} = \dfrac{CP}{AP}$, $\dfrac{\sin(B-\omega)}{\sin\omega} = \dfrac{AP}{BP}$, $\dfrac{\sin(C-\omega)}{\sin\omega} = \dfrac{BP}{CP}$ and after multiplication holds the identity. □

Remark 1. We have the following relations

$$\operatorname{ctg}\omega = \sum \operatorname{ctg} A = \frac{\sum a^2}{4sr} = \frac{1+\prod\cos A}{\prod\sin A}$$

$$= \frac{\sum \sin^2 A}{2\prod\sin A} = \frac{\sum a\sin A}{\sum a\cos A},$$

$$\csc^2\omega = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C,$$

$$\sin\omega = \frac{2sr}{\sqrt{\sum a^2b^2}}.$$

Corollary 1. *Denote P the Brocard point in the triangle ABC, then*

$$\frac{AP}{c} + \frac{BP}{a} + \frac{CP}{b} = 2\cos\omega.$$

Proof. In the triangle APC we have $\sphericalangle CAP = A-\omega$, $\sphericalangle CPA = \pi - A$ and using the sine rule we can write

$$\frac{\sin(A-\omega)}{CP} = \frac{\sin A}{b}.$$

Similarly hold

$$\frac{\sin(B-\omega)}{AP} = \frac{\sin B}{c},\ \frac{\sin(C-\omega)}{PB} = \frac{\sin C}{a}.$$

Expanding the expressions $\sin(A-\omega)$, $\sin(B-\omega)$, $\sin(C-\omega)$ we get

$$\frac{CP}{b} = \cos\omega - \sin\omega\operatorname{ctg} A,$$

[1]Profesor dr., Brașov, benczemihaly@gmail.com

$$\frac{PB}{a} = \cos\omega - \sin\omega \operatorname{ctg} C,$$
$$\frac{AP}{c} = \cos\omega - \sin\omega \operatorname{ctg} B.$$

Adding these we get

$$\frac{AP}{c} + \frac{PB}{a} + \frac{CP}{b} = 3\cos\omega - \sin\omega \sum \operatorname{ctg} A = 2\cos\omega.$$

□

Corollary 2. *In any triangle ABC, we have*

$$\cos^3\omega \geq \frac{27 \cdot AP \cdot BP \cdot CP}{8abc}.$$

Proof. By AM-GM Inequality,

$$2\cos\omega = \sum \frac{AP}{c} \geq 3\sqrt[3]{\prod \frac{AP}{c}}.$$

□

Corollary 3. *In any triangle ABC, we have*

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \geq \frac{4a^2b^2c^2\cos^2\omega}{\sum a^2b^2}.$$

Proof. By Cauchy-Schwarz Inequality,

$$2\cos\omega = \sum \frac{AP}{c} \leq \sqrt{\left(\sum AP^2\right)\left(\sum \frac{1}{a^2}\right)}.$$

□

Corollary 4. *In all triangle ABC, we have*

$$\sqrt{AP} + \sqrt{BP} + \sqrt{CP} \leq \sqrt{2(a+b+c)\cos\omega}.$$

Proof. By Cauchy-Schwarz Inequality,

$$2\cos\omega = \sum \frac{AP}{c} \geq \frac{(\sum \sqrt{AP})^2}{\sum c}.$$

□

Corollary 5. *In all triangle ABC, we have*

$$\left(\frac{2\cos\omega}{\sum a}\right)^{\sum a} \geq \left(\frac{AP}{c^2}\right)^c \left(\frac{BP}{a^2}\right)^a \left(\frac{CP}{b^2}\right)^b.$$

Proof. By weighted AM-GM Inequality, we get

$$\frac{2\cos\omega}{\sum a} = \frac{\sum c \cdot \frac{AP}{c^2}}{\sum c} \geq \left(\prod \left(\frac{AP}{c^2}\right)^c\right)^{\frac{1}{\sum c}}.$$

□

Corollary 6. *In any triangle ABC, we have*

$$\frac{3(2R-r)}{s} \leq \operatorname{ctg}\omega \leq \frac{2R^2+r^2}{sr}.$$

Proof. We have the follows

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{\sum a^2}{4sr} = \frac{s^2-r^2-4Rr}{2sr}.$$

Using the Gerretsen's Inequalities

$$16Rr-5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$$

we obtain the desired results. □

Remark 2. We have the following inequality

$$\operatorname{ctg}\omega \geq \frac{s}{3r}.$$

Proof. We have the follows

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{\sum a^2}{4sr} \geq \frac{(\sum a)^2}{12sr} = \frac{4s^2}{12sr} = \frac{s}{3r}.$$

□

Corollary 7. *In any triangle ABC, we have*

$$\left(\frac{5R-r}{s}\right)^2 - \frac{R}{r} \leq \left(\frac{1}{2\sin\omega}\right)^2 \leq \left(\frac{(R+r)^2}{sr}\right)^2 - \frac{R}{r}.$$

Proof. We have the follows

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = 4R^2\sum\frac{1}{a^2} = \left(\frac{s^2+r^2+4Rr}{2sr}\right)^2 - \frac{4R}{r}.$$

Using the Gerretsen's Inequalities holds the desired results. □

Remark 3. We have the following inequality

$$\frac{1}{\sin^2\omega} \geq \frac{2R}{r}.$$

Proof. We have the follows

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{\sum a^2b^2}{4s^2r^2} \geq \frac{abc\sum a}{4s^2r^2} = \frac{2R}{r}.$$

□

Open Question. Prove or disprove

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 \geq \frac{1}{\sin^2\omega} \geq \frac{2R}{r}.$$

when give a new refinement for Euler's $R \geq 2r$ Inequality.

References

[1] Octogon Mathematical Magazine (1993-2021).

[2] MATINF (2018-2021).

Functions preserving limits of subsequences

Raluca-Ilinca Bălilescu [1]

1 Introduction

Given a bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, let us denote by $L(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}$ the set of all real numbers α for which there exists at least one subsequence of $\mathbf{x}$ converging to α. That is,

$$L(\mathbf{x}) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \exists k_1 < k_2 < \cdots, \quad \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = \alpha\}. \tag{1}$$

It is well-known from basic real analysis that:

- for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$, we have that $L(\mathbf{x})$ is a nonempty compact subset of the real line;
- given a bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$, the set $L(\mathbf{x})$ is a singleton if and only if the sequence $\mathbf{x}$ converges to the unique element of $L(\mathbf{x})$;
- for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$, we have that

$$\{\liminf(\mathbf{x}), \limsup(\mathbf{x})\} \subseteq L(\mathbf{x}) \subseteq [\liminf(\mathbf{x}), \limsup(\mathbf{x})], \tag{2}$$

  where, as usual, $\liminf(\mathbf{x}) = \sup_{k\geq 1}(\inf_{n\geq k} x_n)$ and $\limsup(\mathbf{x}) = \inf_{k\geq 1}(\sup_{n\geq k} x_n)$ are the inferior (respectively, superior) limit of the sequence $\mathbf{x}$.

Equality may occur in the left hand side inclusion or in the right hand side inclusion of (2), even if $\liminf(\mathbf{x}) \neq \limsup(\mathbf{x})$: if $x_n = 0$ for odd n and $x_n = 1$ for even n, then $\liminf(\mathbf{x}) = 0$, $\limsup(\mathbf{x}) = 1$ and $L(\mathbf{x}) = \{0, 1\}$, while if we enumerate $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ as a sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$, then $\liminf(\mathbf{x}) = 0$, $\limsup(\mathbf{x}) = 1$ and $L(\mathbf{x}) = [0, 1]$.

If $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ is not bounded, then $L(\mathbf{x})$ becomes a subset of the extended real line $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: in this case it contains $\alpha \in \mathbb{R}$ (if any) as in (1), and $\alpha \in \{\pm\infty\}$ for which there exists a subsequence of $\mathbf{x}$ which diverges to α. If $\mathbf{x}$ is unbounded, then $L(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}$ might be empty, but $L(\mathbf{x}) \cap \{\pm\infty\}$ is not.

Consider now a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Given a sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, in what follows we shall denote by $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ the sequence obtained by applying the function f to each term of $\mathbf{x}$, that is $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f(x_n))_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$. A well-known result of real analysis states that functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(\lim(\mathbf{x})) = \lim(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ for each convergent sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ are precisely the continuous one. (We have denoted $\lim(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} x_n$ for the convergent

[1]Student, Faculty of Mathematics and Informatics, Ovidius University, Constanța, raluca.balilescu@gmail.com

sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$.) What about functions preserving limit inferior and limit superior of bounded sequences? This question was split into two parts in the article [1]:

($\mathbf{P_1}$): What are the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(\limsup(\mathbf{x})) \leq \limsup(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \tag{3}$$

for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$?

($\mathbf{P_2}$): What are the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$\limsup(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq f(\limsup(\mathbf{x})) \tag{4}$$

for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$?

(Of course, analogous questions may be asked for the limit inferior as well, but their answers will follow immediately once the answers to (P_1) and (P_2) are obtained.) It is proved at [1, Theorem 3] that functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solving (P_1) are exactly the lower semi-continuous ones, and at [1, Theorem 1] that a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a solution to (P_2) if and only if it is increasing and right-continuous. Combining these two results, we see that a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies

$$f(\limsup(\mathbf{x})) = \limsup(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \tag{5}$$

for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$ if and only if it is continuous and increasing [1, Theorem 6].

2 Results

Observe that $f(\limsup(\mathbf{x}))$ belongs to $f(L(\mathbf{x}))$ for each bounded sequence $\mathbf{x}$. If $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ is also bounded above, then the real number $\limsup(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ belongs to $L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Thus (5) in particular implies that

$$f(L(\mathbf{x})) \cap L(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq \emptyset \tag{6}$$

for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$. (Let us observe that (6) also holds if we suppose that $f(\liminf(\mathbf{x})) = \liminf(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ for each bounded sequence $\mathbf{x}$, instead of (5).) What are the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that (6) holds for each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$? That is, what are the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for each bounded sequence $\mathbf{x}$ there exist real numbers $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) = \beta$? As in [1], we shall split this question into two parts. First, observe that if (3) holds, there exist then a real number $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) \leq \beta$. Also, if (4) holds, there exist then a real number $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) \geq \beta$.

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function. Then f is lower semi-continuous if and only if it has the property that given any bounded sequence of real numbers $\mathbf{x}$, there exist a real number $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) \leq \beta$.*

Proof. One implication comes immediately from (3) and the remark preceding the statement of the theorem. If f is lower semi-continuous, by [1, Theorem 3] we have that (3) holds. Since $\limsup(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{x})$ and $\limsup \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, there exist the real number $\alpha = \limsup(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{x})$ and $\beta = \limsup \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) \leq \beta$.

For the converse, consider an arbitrary $a \in \mathbb{R}$. In order to prove that $f^{-1}((-\infty, a]) \subseteq \mathbb{R}$ is closed, consider a sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq f^{-1}((-\infty, a])$ such that $x_n \to \gamma \in \mathbb{R}$. Then $f(x_n) \leq a$ for each $n \geq 1$. Also, $\mathbf{x}$ is bounded, and then by our hypothesis, there exists a real number $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) \leq \beta$. Since $\mathbf{x}$ is convergent, then $L(\mathbf{x}) = \{\lim(\mathbf{x})\}$, and therefore $\gamma = \alpha$. In particular, $f(\gamma) \leq \beta$. Now observe that $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \subseteq (-\infty, a]$, and therefore $L(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \subseteq [-\infty, a]$. Since $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, then $\beta \leq a$. Since we already have proved that $f(\gamma) \leq \beta$, then $f(\gamma) \leq a$. Thus $\gamma \in f^{-1}((-\infty, a])$, as needed. □

As a corollary of Theorem 1, we obtain the result which corresponds to the property which is implied by (4).

Theorem 2. *Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function. Then f is upper semi-continuous if and only if it has the property that given any bounded sequence of real numbers $\mathbf{x}$, there exist a real number $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ such that $f(\alpha) \geq \beta$.*

Proof. Just observe that f has the property from the statement of Theorem 2 if and only if the function $-f$ has the property from the statement of Theorem 1. □

As a corollary of Theorem 1 and Theorem 2, we obtain the characterization of functions f satisfying (6).

Theorem 3. *A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies (6) for each bounded sequence $\mathbf{x}$ if and only if it is continuous.*

Proof. Suppose first that f is continuos on $\mathbb{R}$, and consider a bounded sequence of real numbers $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$. By the Bolzano–Weierstrass theorem, there exists a subsequence $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $x_{k_n} \to \alpha$ as $n \to +\infty$. The continuity of f at α gives then $f(x_{k_n}) \to f(\alpha)$ as $n \to +\infty$. Thus $\alpha \in L(\mathbf{x})$ and $f(\alpha) \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, which gives $f(\alpha) \in (f(L(\mathbf{x})) \cap L(\mathbf{f}(\mathbf{x})))$.

Now if (6) holds for each bounded sequence $\mathbf{x}$, by Theorem 1 we obtain that f is lower semi-continuous on $\mathbb{R}$, and by Theorem 2 we obtain that f is upper semi-continuous on $\mathbb{R}$, as well. Thus, f is continuous on $\mathbb{R}$. □

Of course, the characterization of functions f satisfying (5), which was obtained at [1, Theorem 6], was both topological and related to the order relation on $\mathbb{R}$; this came from the fact that (5) involves the topology on $\mathbb{R}$ and its order relation. Since (6) is related only to the topology of $\mathbb{R}$, the characterization on f obtained at Theorem 3 is also purely topological.

Using now Theorem 3, one can obtain different characterizations for the continuity of the function f obtained by comparing sets of limits of subsequences.

Theorem 4. *For a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, the following assertions are equivalent:*
i) f is continuous on $\mathbb{R}$;
ii) For each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, we have that

$$f(L(\mathbf{x})) \subseteq L(\mathbf{f}(\mathbf{x})); \tag{7}$$

iii) For each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, we have that

$$L(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \subseteq f(L(\mathbf{x})); \tag{8}$$

iv) For each bounded sequence $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, we have that

$$f(L(\mathbf{x})) = L(\mathbf{f}(\mathbf{x})). \tag{9}$$

Proof. If (7) holds for each bounded sequence $\mathbf{x}$, since $L(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}$ is a nonempty set then $f(L(\mathbf{x})) \subseteq \mathbb{R}$ is also nonempty, and therefore (6) holds. Of course, if (9) holds for each bounded sequence $\mathbf{x}$, then again (6) holds. If (8) holds for each bounded sequence $\mathbf{x}$, since $L(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \subseteq (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ is nonempty and $f(L(\mathbf{x}))$ is a subset of $\mathbb{R}$, then $L(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \subseteq \mathbb{R}$ is nonempty and therefore (6) holds. Using now Theorem 3, we see that each of (ii), (iii) and (iv) implies (i).

To finish the proof, it is sufficient to show that (i) implies (iv). So suppose that f is continuous on $\mathbb{R}$ and consider a bounded sequence of real numbers $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geq 1}$. If $\alpha \in L(\mathbf{x})$, then $\alpha \in \mathbb{R}$ and there exists a subsequence $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ such that $x_{k_n} \to \alpha$ as $n \to +\infty$. Since f is continuous at α, then $f(x_{k_n}) \to f(\alpha)$ as well. Thus $f(\alpha) \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. We have therefore proved that $f(L(\mathbf{x})) \subseteq L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. For the reverse inclusion, let us observe first that the continuity of f implies that $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ is also a bounded sequence in $\mathbb{R}$. So let $\beta \in L(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Then $\beta \in \mathbb{R}$, and there exists a subsequence $(x_{j_n})_{n\geq 1}$ of $\mathbf{x}$ such that $f(x_{j_n}) \to \beta$. Since $(x_{j_n})_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ is also a bounded sequence, there exist $\alpha \in \mathbb{R}$ and a subsequence $\left(x_{j_{k_n}}\right)_{n\geq 1}$ of $(x_{j_n})_{n\geq 1}$ such that $x_{j_{k_n}} \to \alpha$ as $n \to +\infty$. Then $\alpha \in L(\mathbf{x})$. Also, the continuity of f at α gives $f\left(x_{j_{k_n}}\right) \to f(\alpha)$. Since $\left(f\left(x_{j_{k_n}}\right)\right)_{n\geq 1}$ is a subsequence of $(f(x_{j_n}))_{n\geq 1}$ and $f(x_{j_n}) \to \beta$, then $f(\alpha) = \beta$. Thus $\beta \in f(L(\mathbf{x}))$. $\square$

References

[1] R. Basu, V. Kannan, K. Sannyasi, N. Unnikrishnan, *Functions preserving limit superior*, The College Mathematics Journal, Vol. 50 Issue 1 (2019), 58-60.

On the bounds of a product involving cosines

Leonard Mihai Giugiuc [1] *and Constantin Mateescu* [2]

The aim of this paper is to determine the best upper and lower bounds of

$$\cos(A+\alpha)\cos(B+\alpha)\cos(C+\alpha)$$

over all non-obtuse-angled and arbitrary triangles ABC, where $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ is given.

1 Introduction

Main Problem. *Let ABC be a triangle and let $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ be a given angle. Find the best numerical lower and upper bounds of*

$$\cos(A+\alpha)\cos(B+\alpha)\cos(C+\alpha)$$

over

1. *all non-obtuse-angled triangles ABC;*
2. *all arbitrary triangles ABC.*

2 Equivalent statement

The identity

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

holds for all real numbers x and y, so we have

$$\cos(A+\alpha) = \cos A \cos\alpha - \sin A \sin\alpha = \sin(\alpha)\cdot(\cot\alpha \cos A - \sin A)$$

as well as the cyclic counterparts.

As $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, it means that $\cot\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, so by setting $k = \cot\alpha \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ we get the following:

Equivalent Problem. *Let ABC be a triangle and let k be a real number so that $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Find the best numerical lower and upper bounds of*

$$F(k) := (k\cos A - \sin A)(k\cos B - \sin B)(k\cos C - \sin C)$$

over

1. *all non-obtuse-angled triangles ABC;*
2. *all arbitrary triangles ABC.*

[1] Teacher, National College "Traian", Drobeta-Turnu Severin, leonardgiugiuc@yahoo.com
[2] Independent Researcher, Pitești, costika1234@gmail.com

3 Solution

We will begin by introducing some notation that will be useful in determining both the upper and lower bounds.

3.1 Preliminaries

By denoting $x = \cot A$, $y = \cot B$, $z = \cot C$, we notice that $xy + yz + zx = 1$. Moreover, $x + y$, $y + z$, $z + x$ are positive, and as a result $x + y + z > 0$. This further implies that

$$x + y + z \geq \sqrt{3}$$

as $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ is true for all real numbers x, y, z.

In addition, we can express the cosines and sines of all angles of triangle ABC as follows:

$$\cos A = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \quad ; \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(x+y)(x+z)}};$$

$$\cos B = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \quad ; \quad \sin B = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(y+z)(y+x)}};$$

$$\cos C = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \quad ; \quad \sin C = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

This allows us to rewrite the target product as:

$$F(k) = \frac{(kx-1)(ky-1)(kz-1)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

3.2 Upper bounds

Let $p = x + y + z$ be fixed and let $r = xyz$. We observe that

$$\frac{(kx-1)(ky-1)(kz-1)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{k^3r - k^2 + kp - 1}{p - r} := f(r),$$

where the domain of the function f is a (possibly degenerate) interval.

Taking the first derivative we see that

$$f'(r) = \frac{(kp-1)(k^2+1)}{(k-r)^2},$$

which is nonnegative as $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ and $p \geq \sqrt{3}$ imply that $kp - 1 \geq 0$. In other words, f is an increasing function of r.

Now, consider $p = \frac{3t^2+1}{2t}$, where t is fixed in $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. It is well known (or see Theorem 2 from [1]) that regardless of whether the triangle is non-obtuse-angled or not, the maximum value of r is attained when (x, y, z) is any permutation of

$$\left(t, t, \frac{1-t^2}{2t}\right).$$

Therefore, the following inequality holds:

$$\frac{(kx-1)(ky-1)(kz-1)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \left(\frac{kt-1}{t^2+1}\right)^2 \left(k-kt^2-2t\right).$$

Consider the function $g:\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\to\mathbb{R}$ given by

$$g(t)=\left(\frac{kt-1}{t^2+1}\right)^2\left(k-kt^2-2t\right)$$

and note that

$$g'(t)=\frac{2(k^2+1)(kt-1)(1-3t^2)}{(t^2+1)^3}.$$

Thus, if $k\geq\sqrt{3}$, then

$$\max_{t\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]} g(t)\in\left\{g(0),g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\},$$

and if $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq k\leq\sqrt{3}$, then

$$\max_{t\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]} g(t)=g(0)$$

as $g'(t)\leq 0$ in this case.

Consequently,

$$\max_{t\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]} g(t)=\begin{cases}\frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}, & \text{if} \quad k\geq 3\sqrt{3}\\ \\ k, & \text{if} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\leq k\leq 3\sqrt{3}\end{cases}.$$

So, if $k\geq 3\sqrt{3}$, then

$$\sup F=\frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8},$$

which is attained, for example, when triangle ABC is equilateral.

We also proved that

$$F(k)\leq k$$

holds for all k so that $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq k\leq 3\sqrt{3}$. Here we can notice that equality is attained for an isosceles triangle whose angle between the two equal sides, say A, approaches to 0 :

$$\lim_{A\to 0^+}\left[\left(k\cos A-\sin A\right)\left(k\cos B-\sin B\right)\left(k\cos C-\sin C\right)\right]=k\cdot(-1)\cdot(-1)=k.$$

Therefore, we can conclude that

$$\sup F=\begin{cases}\frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}, & \text{if} \quad k\geq 3\sqrt{3}\\ \\ k, & \text{if} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\leq k\leq 3\sqrt{3}\end{cases}.$$

3.3 Lower bounds

Now, let us find the best numerical lower bound of the product under consideration for $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, and over all non-obtuse-angled triangles ABC. We will also extend the result to nonnegative real numbers x, y, z.

Just like before, denote $p = \frac{3t^2+1}{2t}$, where t is fixed, $t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. According to Theorem 3 from [1], the minimum value of r is attained when (x, y, z) is of the form

$$\left(t, t, \frac{1-t^2}{2t}\right)$$

(up to permutations) as long as $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq 1$. In addition, the minimum of r is equal to 0 whenever $t \geq 1$.

Thus, if $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq 1$, then

$$h(t) := \left(\frac{kt-1}{t^2+1}\right)^2 \left(k - kt^2 - 2t\right) \leq F(k).$$

Note that $h(t)$ is the same as $g(t)$ above, so $h'(t) = g'(t) \leq 0$, which means that

$$\min_{t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]} h(t) = h(1) = -\frac{(k-1)^2}{2}.$$

Now, for $z = 0$, we have that

$$F(k) = -\frac{(kx-1)(ky-1)}{x+y}$$

as $xy + yz + zx = 1$ turns into $xy = 1$.

We will show that

$$-\frac{(kx-1)(ky-1)}{x+y} \geq -\frac{(k-1)^2}{2},$$

that is,

$$\frac{(kx-1)(ky-1)}{x+y} \leq \frac{(k-1)^2}{2}.$$

By cross-multiplying and taking into account the fact that $xy = 1$, we are left to prove the following inequality in x and k :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)(k-1)^2 - 2(kx-1)\left(\frac{k}{x} - 1\right) \geq 0,$$

which is true as it can be rearranged into

$$\frac{(k^2+1)(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

In conclusion,

$$F(k) \geq -\frac{(k-1)^2}{2}$$

and equality holds for a right-isosceles triangle. Indeed, if $A = \frac{\pi}{2}$ and $B = C = \frac{\pi}{4}$ we have

$$(k\cos A - \sin A)(k\cos B - \sin B)(k\cos C - \sin C) = (-1)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(k-1)\right]^2 = -\frac{(k-1)^2}{2},$$

so we can claim that

$$\inf F = -\frac{(k-1)^2}{2}.$$

Let us determine the best lower bound of $F(k)$ over all triangles ABC, where $k \geq \sqrt{3}$. Preserving the notations above, the minimum value of r is attained when the triple (x, y, z) is any permutation of

$$\left(t, t, \frac{1-t^2}{2t}\right)$$

for each fixed $t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Since h is decreasing, we get that

$$\inf F = \lim_{t\to\infty} h(t) = -k^3.$$

Next up, let's deal with finding the best lower bound of $F(k)$ over all triangles ABC under the condition that $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k < \sqrt{3}$. As noted above,

$$h'(t) = g'(t) = \frac{2(k^2+1)(kt-1)(1-3t^2)}{(t^2+1)^3},$$

and thus

$$\inf F = \min\left\{h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \lim_{t\to\infty} h(t)\right\} = -k^3.$$

Our next task is to find the best lower bound of $F(k)$ over all non-obtuse-angled triangles ABC, where $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq 1$. Notice that h is strictly increasing on $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$, so

$$\frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8} = h(1) < h(\sqrt{3}) = -\frac{(k-1)^2}{2}.$$

Since earlier we showed that

$$-\frac{(kx-1)(ky-1)}{x+y} \geq -\frac{(k-1)^2}{2},$$

then in this case we have

$$\inf F = \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}.$$

Lastly, let us now find the best lower bound of $F(k)$ over all non-obtuse-angled triangles ABC, where $1 < k < \sqrt{3}$. By denoting

$$m = \min\left\{\frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}, -\frac{(k-1)^2}{2}\right\},$$

we clearly have that

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1\right]} h(t) = m.$$

In addition,

$$-\frac{(kx-1)(ky-1)}{x+y} \geq -\frac{(k-1)^2}{2} \geq m$$

and

$$\left(k-\sqrt{3}\right)^3 + 4(k-1)^2 = \left[k-\left(3\sqrt{3}-4\right)\right](k^2+1).$$

In conclusion, the following holds true for non-obtuse-angled triangles ABC :

$$\inf F = \begin{cases} -\frac{(k-1)^2}{2}, & \text{if} \quad k \geq 3\sqrt{3}-4 \\ \\ \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}, & \text{if} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq 3\sqrt{3}-4 \end{cases}.$$

4 Alternative solution

We will now present an elementary solution that doesn't require the use of derivatives. To this end, we will employ a great deal of trigonometric identities and inequalities expressed in terms of the canonical elements of a triangle, namely: R (circumradius), r (inradius) and s (semiperimeter).

In what follows, we will start by introducing a key identity along with well-known inequalities that will be used throughout the subsequent proofs.

4.1 Preliminaries

4.1.1 Expressing $F(k)$ in terms of R, r and s

Let us begin by establishing the following identity:

$$\prod(k\cos A - \sin A) = k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(\frac{s}{2R} - \frac{1}{k}\cdot\frac{r}{2R}\right)^2 - \left(1+\frac{r}{2R}\right)^2 - \left(\frac{1}{k}\cdot\frac{r}{2R}\right)^2\right].$$

Applying Result 141.1 (see [2]) to a triangle with angles $(\pi-2A, \pi-2B, \pi-2C)$ – also known as the orthic triangle and described in the Extension of Result 111 (see [3]) – we get:

$$\begin{aligned}\prod(\cot A - \cot\phi) &= \frac{1}{s_0}\cdot\frac{\cot\phi}{\sin^2\phi}\Big(2R_0\sin(2\phi) + r_0\tan\phi - s_0\Big) \\ \\ &= \frac{R}{rs}\cdot\frac{\cot\phi}{\sin^2\phi}\Big(R\sin(2\phi) + 2R\tan\phi\prod\cos A - \frac{rs}{R}\Big) \\ \\ &= \frac{2R^2}{rs}\cdot\cot^2\phi + \frac{s^2-(2R+r)^2}{2rs}\cdot\frac{1}{\sin^2\phi} - \frac{\cot\phi}{\sin^2\phi}.\end{aligned}$$

Now, by denoting $k = \tan\phi$, we further obtain:

$$\prod\left(\cot A - \frac{1}{k}\right) = \frac{2R^2}{rs}\cdot\frac{1}{k^2} + \frac{s^2-(2R+r)^2}{2rs}\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k^2}\right).$$

Multiplying both sides of the previous equation by $k^3\prod\sin A$ gives:

$$\prod(k\cos A - \sin A) = \frac{rs}{2R^2}\cdot\left[\frac{2R^2}{rs}\cdot k + \frac{s^2-(2R+r)^2}{2rs}\cdot\left(k^3+k\right) - \left(k^2+1\right)\right]$$

$$= k + \frac{k\left(k^2+1\right)\left[s^2-(2R+r)^2-2rs\cdot\frac{1}{k}\right]}{4R^2}$$

$$= k + k\left(k^2+1\right)\cdot\frac{\left(s-\frac{r}{k}\right)^2-(2R+r)^2-\frac{r^2}{k^2}}{4R^2}$$

$$= k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(\frac{s}{2R}-\frac{1}{k}\cdot\frac{r}{2R}\right)^2 - \left(1+\frac{r}{2R}\right)^2 - \left(\frac{1}{k}\cdot\frac{r}{2R}\right)^2\right],$$

which is exactly what we wanted to prove.

4.1.2 Well-known inequalities involving R, r and s

Throughout the remaining of this article we will make use of some famous results from the literature of geometric inequalities (see [4]), namely:

1. Euler's inequality:
$$R \geq 2r;$$
2. Gerretsen's inequality:
$$16Rr - 5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2;$$
3. Mitronović's inequality:
$$3r\sqrt{3} \leq s \leq \frac{3R\sqrt{3}}{2};$$
4. Walker's inequality (holds for non-obtuse-angled triangles):
$$s^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2;$$
5. Unnamed inequality equivalent to $\prod\cos A \geq 0$:
$$s \geq 2R + r.$$

4.1.3 Equivalent form of $F(k)$

For simplicity, let's denote $x = \frac{s}{2R} \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ and $y = \frac{r}{2R} \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. As a result, our previously-derived identity is equivalent to:

$$F(k) = k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(x-\frac{y}{k}\right)^2 - (1+y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right].$$

4.2 $\sup F = k$ in all triangles, $k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right)$

We will prove that the expression within square brackets from our identity above is nonpositive for all k satisfying $k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right)$. To this end, we will make use of Gerretsen's inequality, i.e. $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, which we can equivalently write as

$$x^2 \leq 1 + 2y + 3y^2.$$

Since $s \geq 3r\sqrt{3}$, it's easy to see that $x > \frac{y}{k}$ for all $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Therefore, it is enough to show that

$$\left(\sqrt{1 + 2y + 3y^2} - \frac{y}{k}\right)^2 \leq (1 + y)^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2.$$

After expanding and rearranging, we are left to prove that

$$2y^2 \leq \frac{2y}{k} \cdot \sqrt{1 + 2y + 3y^2}.$$

The case when $y = 0$ is trivial. Otherwise, we can divide by $2y$ and square both sides. In that case, the claim reduces to

$$(3 - k^2)y^2 + 2y + 1 \geq 0,$$

which is clearly satisfied as $k^2 < 27$ implies

$$(3 - k^2)y^2 + 2y + 1 > -24y^2 + 2y + 1$$

and $-24y^2 + 2y + 1 = (1 - 4y)(6y + 1) \geq 0$ since $0 \leq y \leq \frac{1}{4}$.

Consequently, $F(k) \leq k$ for all $k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right)$, and equality is attained if and only if triangle ABC is degenerate with two angles equal to $\frac{\pi}{2}$. (Note that we have $y = 0$ in this case.)

4.3 $\sup F = \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}$ in all triangles, $k \in \left[3\sqrt{3}, \infty\right)$

If $k \geq 3\sqrt{3}$, the upper bound of $F(k)$ is $\frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}$. To prove this, we will once again employ the inequality $x^2 \leq 1 + 2y + 3y^2$ and thus maximize $F(k)$ as follows:

$$F(k) \leq k + k\left(k^2 + 1\right)\left[\left(\sqrt{1 + 2y + 3y^2} - \frac{y}{k}\right)^2 - (1 + y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right].$$

Therefore, it suffices to prove that

$$k + k\left(k^2 + 1\right)\left[\left(\sqrt{1 + 2y + 3y^2} - \frac{y}{k}\right)^2 - (1 + y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right] \leq \frac{\left(k - \sqrt{3}\right)^3}{8},$$

which, after some simplifications, reduces to

$$\frac{k^2 + 1}{8} \cdot \left[k\left((4y)^2 - 1\right) + 3\sqrt{3} - 16y\sqrt{1 + 2y + 3y^2}\right] \leq 0.$$

We will now show that the expression within square brackets is nonpositive. Indeed, since $4y \leq 1$ and $k \geq 3\sqrt{3}$, we get

$$k\left((4y)^2-1\right) \leq 3\sqrt{3}\left((4y)^2-1\right),$$

so we only need to establish the following inequality:

$$3\sqrt{3}\left((4y)^2-1\right)+3\sqrt{3} \leq 16y\sqrt{1+2y+3y^2}.$$

The latter is equivalent to

$$3y\sqrt{3} \leq \sqrt{1+2y+3y^2},$$

which is just

$$-24y^2+2y+1 \geq 0$$

after squaring both sides and rearranging. We've previously shown that the quadratic expression factorizes as $(1-4y)(6y+1)$, which is nonnegative, so our inequality holds.

Equality is attained if and only if $4y=1$, or $R=2r$, which corresponds to triangle ABC being equilateral.

4.4 $\inf F = -k^3$ in all triangles, $k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

Note that the inequality $F(k) \geq -k^3$ is equivalent to

$$k\left(k^2+1\right)\left[1+\left(x-\frac{y}{k}\right)^2-(1+y)^2-\left(\frac{y}{k}\right)^2\right] \geq 0.$$

By the other inequality of Gerretsen, i.e. $s^2 \geq 16Rr-5r^2$, we have that $x^2 \geq 8y-5y^2$. Thus, proving that the expression within square brackets is nonnegative boils down to

$$1+\left(\sqrt{8y-5y^2}-\frac{y}{k}\right)^2 \geq (1+y)^2+\left(\frac{y}{k}\right)^2.$$

Routine calculations allow us to transform the previous inequality into

$$6y(1-y) \geq \frac{2y}{k}\sqrt{8y-5y^2},$$

which holds true if $y=0$. Otherwise, we can divide by $2y$ and square both sides, thus getting

$$k^2 \geq \frac{8y-5y^2}{9(y-1)^2}.$$

Since $k^2 \geq \frac{1}{3}$, we are left to prove that

$$\frac{1}{3} \geq \frac{8y-5y^2}{9(y-1)^2},$$

or

$$\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{1}{4}\right)}{(y-1)^2} \geq 0,$$

which is clearly true given that $0 \leq y \leq \frac{1}{4}$.

Equality holds if and only if triangle ABC is degenerate with two angles equal to 0 (in which case $y=0$), or if and only if triangle ABC is equilateral and $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (in which case $y=1/4$).

4.5 $\inf F = \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}$ in non-obtuse-angled triangles, $k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}-4\right)$

We will use a similar strategy as in the previous part, except that this time we will make use of $s \geq 2R + r$ and Walker's inequality, i.e. $s^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$, both of which being true for non-obtuse-angled triangles. In terms of x and y, the previous inequalities are equivalent to

$$x \geq 1 + y \quad \text{and} \quad x \geq \sqrt{\frac{1}{2} + 4y + 3y^2},$$

respectively.

Now, we will minimize $F(k)$ via the first inequality, thus getting:

$$F(k) \geq k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(1+y-\frac{y}{k}\right)^2 - (1+y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right].$$

In what follows we will prove that

$$k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(1+y-\frac{y}{k}\right)^2 - (1+y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right] \geq \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}$$

holds whenever $\frac{R}{r} \geq 1 + \sqrt{2}$.

After a series of manipulations, the previous inequality can be written as

$$\frac{k^2+1}{8} \cdot \left(3\sqrt{3} - k - 16y^2 - 16y\right) \geq 0,$$

so it is enough to establish that

$$16y^2 + 16y + k \leq 3\sqrt{3}$$

is true under the conditions $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ and $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq k < 3\sqrt{3} - 4$.

This follows immediately based on the fact that $16y^2 + 16y$ attains a maximum of 4 at $y = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, so we have now proven that $F(k) \geq \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}$ holds under the condition $\frac{R}{r} \geq 1 + \sqrt{2}$. Notice that there is no equality case as k is strictly less than $3\sqrt{3} - 4$.

Similarly, we can minimize $F(x)$ via $x \geq \sqrt{\frac{1}{2} + 4y + 3y^2}$:

$$F(k) \geq k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2} + 4y + 3y^2} - \frac{y}{k}\right)^2 - (1+y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right].$$

Therefore, we can prove the desired inequality by showing that

$$k + k\left(k^2+1\right)\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2} + 4y + 3y^2} - \frac{y}{k}\right)^2 - (1+y)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2\right] \geq \frac{\left(k-\sqrt{3}\right)^3}{8}$$

holds for all $k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}-4\right)$ and triangles ABC satisfying $\frac{R}{r} \in \left[2, 1+\sqrt{2}\right)$.

Again, after performing some manipulations, we find that the previous inequality is equivalent to

$$\frac{k^2+1}{8}\cdot\left(16ky^2+16ky-5k-8y\sqrt{2}\cdot\sqrt{6y^2+8y+1}+3\sqrt{3}\right)\geq 0.$$

In other words, we need to show that

$$k\left(16y^2+16y-5\right)+3\sqrt{3}\geq 8y\sqrt{2}\cdot\sqrt{6y^2+8y+1}$$

is true under the conditions $\frac{\sqrt{2}-1}{2}<y\leq\frac{1}{4}$ and $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq k<3\sqrt{3}-4$.

Now we can see that $16y^2+16y-5\in(-1,0]$, so

$$k\left(16y^2+16y-5\right)\geq\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(16y^2+16y-5\right).$$

Therefore, we are left to show that

$$\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(16y^2+16y-5\right)+3\sqrt{3}\geq 8y\sqrt{2}\cdot\sqrt{6y^2+8y+1},$$

which, after squaring both sides and rearranging, becomes

$$(1-4y)\left[4y\left(3\sqrt{3}-5\right)+15\sqrt{3}-26\right]\left(4y^2+4y-1\right)\geq 0.$$

As $\frac{\sqrt{2}-1}{2}<y\leq\frac{1}{4}$, it means that $1-4y\geq 0$ and $4y^2+4y-1>0$. Therefore, it remains to prove the following inequality:

$$4y\left(3\sqrt{3}-5\right)+15\sqrt{3}-26\geq 0.$$

That is,

$$y\geq\frac{3\sqrt{3}-5}{8},$$

which is clearly satisfied in this case.

Note that equality holds if and only if triangle ABC is equilateral.

4.6 $\inf F=-\frac{(k-1)^2}{2}$ in non-obtuse-angled triangles, $k\in\left[3\sqrt{3}-4,\infty\right)$

Lastly, we will use similar casework as in the previous subsection to show that $F(k)\geq-\frac{(k-1)^2}{2}$ holds provided that $k\geq 3\sqrt{3}-4$.

Note that the conclusion is tantamount to the following inequality:

$$\left(x-\frac{y}{k}\right)^2-(1+y)^2-\left(\frac{y}{k}\right)^2\geq-\frac{1}{2k}.$$

To begin with, we will use $x\geq 1+y$ to prove that the above is true whenever $\frac{R}{r}\geq 1+\sqrt{2}$. Indeed, the inequality

$$\left(1+y-\frac{y}{k}\right)^2-(1+y)^2-\left(\frac{y}{k}\right)^2\geq-\frac{1}{2k}$$

is equivalent to

$$-\frac{4y^2+4y-1}{2k} \geq 0.$$

As $\frac{R}{r} \geq 1+\sqrt{2}$, or $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, we have that $4y^2+4y-1 \leq 0$, and thus our claim follows.

Equality holds if and only if $y = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ and $x = 1+y$, or if and only if triangle ABC is right-isosceles, e.g. $A = \frac{\pi}{2}$ and $B = C = \frac{\pi}{4}$.

Moving on, it remains to show our inequality under the condition that $2 \leq \frac{R}{r} < 1+\sqrt{2}$. This can be done using the equivalent form of Walker's inequality written in terms of x and y, namely:

$$x \geq \sqrt{\frac{1}{2}+4y+3y^2}.$$

In other words, it is enough to prove that

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}+4y+3y^2}-\frac{y}{k}\right)^2-(1+y)^2-\left(\frac{y}{k}\right)^2 \geq -\frac{1}{2k}$$

holds for all y so that $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < y \leq \frac{1}{4}$, where $k \geq 3\sqrt{3}-4$.

After expanding and rearranging, the target inequality reduces to:

$$k(4y^2+4y-1)+1 \geq 2y\sqrt{2}\cdot\sqrt{6y^2+8y+1}.$$

Since $4y^2+4y-1 > 0$ in the specified range of y, we can further square both sides and rearrange to obtain

$$(1-4y)\left[4y\left(3\sqrt{3}-5\right)+15\sqrt{3}-26\right]\left(4y^2+4y-1\right) \geq 0,$$

which is actually the same inequality that we came across in the previous case. This is once again true as each of the three factors are nonnegative, so we are done. (To be more precise, note that the last two factors are actually positive.)

Equality holds if and only if $1-4y = 0$, or, equivalently, if and only if triangle ABC is equilateral.

5 Final remarks

Coming back to the original problem posed at the beginning of the article, we see that

$$\sup\left[\cos(A+\alpha)\cos(B+\alpha)\cos(C+\alpha)\right] = \begin{cases} \cos^3\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right), & \text{if} \quad 0 < \alpha \leq \operatorname{arccot}\left(3\sqrt{3}\right) \\ \sin^2\alpha\cos\alpha, & \text{if} \quad \operatorname{arccot}\left(3\sqrt{3}\right) < \alpha \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

over all triangles ABC (including non-obtuse-angled triangles).

As for the lower bound, we have that

$$\inf\left[\cos\left(A+\alpha\right)\cos\left(B+\alpha\right)\cos\left(C+\alpha\right)\right]=\begin{cases}-\sin\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right), & \text{if} \quad 0<\alpha<\operatorname{arccot}\left(3\sqrt{3}\right)\\ \cos^3\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right), & \text{if} \quad \operatorname{arccot}\left(3\sqrt{3}\right)<\alpha\leq\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

over all non-obtuse-angled triangles ABC.

Finally, the following is true over all triangles ABC :

$$\inf\left[\cos\left(A+\alpha\right)\cos\left(B+\alpha\right)\cos\left(C+\alpha\right)\right]=-\cos^3\alpha.$$

References

[1] L. Giugiuc, C. A. Trăncănău, A. Pîrvuceanu, *Metode moderne de demonstrare a unor inegalități in triunghi*, Revista de Matematică Marinescu-Ghemeci Octavian (2018), nr. 1, 41–43.

[2] C. Mateescu, *Useful Identities and Inequalities in Geometry Thread*, `https://artofproblemsolving.com/community/c6h412623p2481722`

[3] C. Mateescu, *Useful Identities and Inequalities in Geometry Thread*, `https://artofproblemsolving.com/community/c6h412623p2382562`

[4] D. S. Mitrinović, E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

A note on the properties of Fibonacci trees' leaves

Radu-Ioan Mihai [1]

The Fibonacci sequence is very well-known and has many applications. In this note we present some properties of the Fibonacci trees' leaves, with applications in Computer Science.

1 Introduction

People are using numbers in their everyday life, even if their jobs are related to Mathematics or not. Some of them are using numbers just as an instrument, but the researchers will try to use them different in applications in order to help humanity to evolve.

It is known that Fibonacci numbers are a part of our life, being considered one of the most interesting and important part of Mathematics too. They are frequently used in Algebra (see [1]), Analysis and Geometry (see [3]) or Computer Science (especially in the Graph Theory).

One considers the recurrent sequence $(F_n)_{n\geq 0}$, defined by

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, ...,$$

related by

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

for all $n \geq 0$, called the *Fibonacci Sequence* (see, for instance, [5]).

There are many universe's rules that are related to Fibonacci numbers (see [2], [6]), which prove how important are these numbers for understanding the world we are living in.

But all these amazing researches could not be possible without the work of the French mathematician Édouard Lucas, who made the Fibonacci sequence so well-known all around the Globe.

A *Fibonacci tree* is a variant of a binary tree where a tree of order n ($n > 1$) has a left subtree of order $n-1$ and a right subtree of order $n-2$ (see [7]).

We denote by $\mathcal{L}_{F_n}$ the number of the F_n value leaves of the left subtree and with $\mathcal{R}_{F_n}$ the number of the F_n value leaves of the right subtree, where F_n is the n-th number in the Fibonacci sequence. Also, $\mathcal{T}_{F_n}(n)$ the number of the F_n value leaves of an n-order tree.

Recall that φ is the Golden Ratio, i.e. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[1]Student, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest, rimihai2001@gmail.com, radu.mihai4@s.unibuc.ro

2 Number of leaves in a Fibonacci tree

In this section, we will prove, by using mathematical induction, the following

Theorem 1. *For any $n > 4$, the following relations hold:*

$$P(n): \begin{cases} \mathcal{L}_{F_1} = F_{n-1} \\ \mathcal{L}_{F_0} = F_{n-3} \\ \mathcal{R}_{F_1} = F_{n-2} \\ \mathcal{R}_{F_0} = F_{n-4} \end{cases}.$$

We will use the order 2 and order 3 trees (Images 1 and 2) to start the proof.

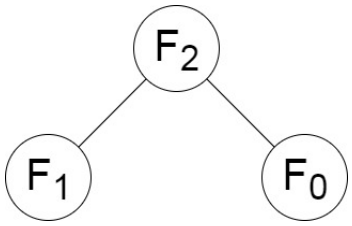


Image 1

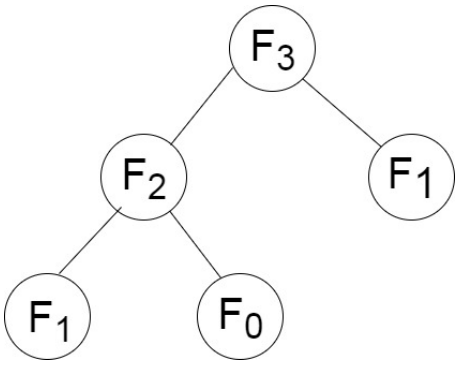


Image 2

The order 4 tree will have the order 3 tree as the left subtree and the order 2 tree as the right subtree.

It follows that the order 4 tree will have:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{F_1} = 2 \\ \mathcal{L}_{F_0} = 1 \\ \mathcal{R}_{F_1} = 1 \\ \mathcal{R}_{F_0} = 1 \end{cases}.$$

As previously stated, the order 5 tree will have the order 4 tree as the left subtree and the order 3 tree as the right subtree, which means that:

$$P(5): \begin{cases} \mathcal{L}_{F_1} = 3 = F_4 \\ \mathcal{L}_{F_0} = 1 = F_2 \\ \mathcal{R}_{F_1} = 2 = F_3 \\ \mathcal{R}_{F_0} = 1 = F_1 \end{cases},$$

which verifies our hypothesis.

If $P(k)$ is true (where $k \in \{5, 6, 7, ..., n-1, n\}$), then the $(n+1)$-order tree will have the the n-order tree as the left subtree and the order $(n-1)$-tree as the right subtree, which means that:

$$P(n+1): \begin{cases} \mathcal{L}_{F_1} = \mathcal{T}_{F_1}(n) = F_{n-1} + F_{n-2} = F_n \\ \mathcal{L}_{F_0} = \mathcal{T}_{F_0}(n) = F_{n-3} + F_{n-4} = F_{n-2} \\ \mathcal{R}_{F_1} = \mathcal{T}_{F_1}(n-1) = F_{n-2} + F_{n-3} = F_{n-1} \\ \mathcal{R}_{F_0} = \mathcal{T}_{F_0}(n-1) = F_{n-4} + F_{n-5} = F_{n-3} \end{cases},$$

so our hypothesis is correct!

3 Properties of the leaves

Using the previous result, we have the following interesting properties (it is known that $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$).

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{L}_{F_1}}{\mathcal{R}_{F_1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}} = \varphi$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{L}_{F_0}}{\mathcal{R}_{F_0}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n-3}}{F_{n-4}} = \varphi$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{T}_{F_1}(n)}{\mathcal{T}_{F_0}(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-2}} = \varphi^2$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{T}_{F_1}(n)}{\mathcal{T}_{F_1}(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{T}_{F_0}(n)}{\mathcal{T}_{F_0}(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n-2}}{F_{n-3}} = \varphi$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{L}_{F_1} + \mathcal{L}_{F_0}}{\mathcal{R}_{F_1} + \mathcal{R}_{F_0}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n-1} + F_{n-3}}{F_{n-2} + F_{n-4}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{F_{n-1}}{F_{n-4}} + \frac{F_{n-3}}{F_{n-4}}}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-4}} + 1} =$

$$= \frac{\varphi^3 + \varphi}{\varphi^2 + 1} = \frac{\varphi(\varphi^2 + 1)}{\varphi^2 + 1} = \varphi.$$

Remark 1. These results are also true for any subtree with a bigger order than 4!

Remark 2. One can generalize in the following way: the Fibonacci tree is always amazing to work with, but, the remarkable thing is that the previous stated properties are also valid on any tree, where the sequence's recurrence formula is the same (the n-order number is the sum of the $(n-1)$-order and $(n-2)$-order.

Of course, one of the best examples of generalization is the *Lucas tree*, that will have the same configuration as the Fibonacci tree. The only difference is that instead of leaves of value F_0 and F_1, it will have leaves of value L_0 and L_1.

4 Applications

The formulas and properties from this article can be used to solve easier some problems in Computer Science:

1. How many leaves of value F_1 are in a Fibonacci tree with root F_n? **Solution.** One determine $\mathcal{T}_{F_1}$, which is equal to F_n, that can be easily calculated. *Note:* Analogously for leaves of value F_0.

2. A Fibonacci tree has x (where x is a number from the Fibonacci sequence) leaves of value F_1. Determine the value of the biggest number from the level y (where y value is less than the tree's height). **Solution.** We know that $\mathcal{T}_{F_1} = F_n$ value is equal to the value from the tree's root, so the searched value is F_{n-y}. *Note:* Analogously for leaves of value F_0.

3. We know that a Fibonacci subtree which is directly connected to the root of the Fibonacci tree has x leaves of value F_0 and y leaves of value F_1 (where x and y are numbers from the Fibonacci sequence). Calculate the number of the leaves with values F_1 and F_0 from the other Fibonacci Subtree directly connected to the root. **Solution.** We will decrease or increase respectively the order of the Fibonacci numbers beginning from the two values inserted.

5 Conclusions

The results can be used to study the properties of k-Fibonacci-type trees or to find a visual representation of Fibonacci and Lucas numbers' partitions or k-Fibonacci and k-Lucas numbers' partitions, projects considered very useful by the author because of their huge potential in Theoretical Computer Science (especially in the development of new algorithms, more efficient than the Backtracking Algorithms).

It can be also given as an interesting model for high-school/college teachers which want to demonstrate the beauty of the Graph Theory to their students.

References

[1] T. Caba, R.I. Mihai, *Generating a congruence* (in Romanian), Argument **19** (2017), 11-12.

[2] J. Gielis, *Inventing the Circle. The Geometry of Nature*, Geniaal, Antwerpen, 2003.

[3] R.I. Mihai, *A geometric approach to Fibonacci and Lucas sequences*, Parabola **56(1)** (2020), 1-5.

[4] R.I. Mihai, *A relationship between Lucas and Fibonacci sequences* (in Romanian), Argument, to appear.

[5] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*, Dover Publ., Mineola, New York, 2008.

[6] https://oeis.org/

[7] https://xlinux.nist.gov/dads/HTML/fibonacciTree.html

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI

Algoritmi de rezolvare a unei categorii de ecuații diofantice cu restricții

Doru Anastasiu Popescu [1] *and Miguel Amengual Covas* [2]

În acest articol ne propunem să oferim cititorului o modalitate de rezolvare a problemei determinării soluțiilor întregi, dintr-un interval dat, pentru anumite tipuri de ecuații diofantice cu coeficienți întregi, cu una sau două necunoscute.

1 Introducere

Scopul acestui articol este de a scrie câte un algoritm pentru fiecare din tipurile de ecuații diofantice $f(x) = 0$ și $f(x) + g(y) = 0$, f și g fiind polinoame cu coeficienți întregi, iar necunoscutele x și y numere întregi dintr-un interval fixat $[u, v]$. După identificarea algoritmilor vom realiza implementări ale lor în limbajul C++. Aceste programe vor fi verificate pentru câteva ecuații diofantice din lucrările [1] – [4].

Astfel, în secțiunea 2 identificăm un algoritm pentru calculul valorii unui polinom într-un punct folosind un număr minim de înmulțiri. În secțiunea 3 rezolvăm cu un algoritm ecuația $f(x) = 0$, iar în secțiunea 4 ecuația $f(x) + g(y) = 0$.

În secțiunea 5 sunt prezentate programele C++ pentru implementarea algoritmilor din secțiunile 3 și 4. Tot în secțiunea 5 sunt prezentate exemple de ecuații diofantice ce pot fi rezolvate folosind aceste programe.

2 Valoarea funcției polinomiale

În continuare vom considera $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom de gradul n, $n \geq 1$ cu coeficienți întregi și x un număr întreg. Dorim să calculăm $f(x)$ folosind cât mai puține operații de înmulțire.

Pentru acest lucru vom scrie polinomul f sub o formă convenabilă:

$$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + X(\ldots + Xa_n)))$$

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com
[2] Cala Figuera, Mallorca, Spania

Caz particular, $n = 3$:

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_0 + X(a_1 + X(a_2 + Xa_3))$$

În acest caz se efectuează trei înmulțiri.

Dacă considerăm $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 1$, $x = 2$, atunci $f(2) = 3 + 2(2 + 2(5 + 2 \cdot 1))$, adică $f(2) = 35$.

Algoritmul 1.

Date de intrare: n, $a_0, a_1, \ldots, a_n, x$

Date de ieșire: f

Pasul 1. citim n, $a_0, a_1, \ldots, a_n, x$

Pasul 2. $f = 0$

Pasul 3. pentru $i = n, 0, -1$ execută

$$f = a_i + x * f$$

sfârșit pentru

Pasul 4. afișăm f

Observația 1. Algoritmul 1 calculează valoarea $f(x)$ folosind $n + 1$ înmulțiri și $n + 1$ comparații (realizate la *pasul 3*), exceptând comparațiile pentru citirea datelor de intrare.

3 Rezolvarea ecuațiilor de forma $f(x) = 0$ în mulțimea numerelor întregi

În continuare vom considera $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom de gradul n, $n \geq 1$ cu coeficienți întregi. Pentru un polinom f de acest tip dorim un algoritm eficient de determinare a soluțiilor întregi pentru ecuația:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

În acest scop vom utiliza următoarele rezultate din matematică (pentru detalii se poate consulta [3]):

Propoziția 1. *Dacă ecuația* (1) *are ca soluție numărul rațional* $\frac{p}{q}$, *unde* p *și* q *sunt numere întregi prime între ele,* q *nenul, atunci:*

a) p *divide* a_0

b) q *divide* a_n

Propoziția 2. *Dacă ecuația* (1) *are ca soluție numărul întreg* p, *atunci* p *divide* a_0.

Folosind Propoziția 2 și Algoritmul 1 putem să construim un algoritm de determinare a soluțiilor întregi pentru ecuația (1).

Algoritmul 2.

Date de intrare: $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$

Date de ieșire: x (soluțiile ecuației (1))

Pasul 1. citim $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$

Pasul 2. pentru $x = 1, \dfrac{|a_0|}{2}$ execută

Pasul 3. $f = 0$

Pasul 4. pentru $i = n, 0, -1$ execută

$$f = a_i + x * f$$

sfârșit pentru

Pasul 5. dacă $f = 0$ atunci

afișăm x,″ ″

sfârșit dacă

Pasul 6. pentru $i = n, 0, -1$ execută

$$f = a_i + (-x) * f$$

sfârșit pentru

Pasul 7. dacă $f = 0$ atunci

afișăm $-x$,″ ″

sfârșit dacă

sfârșit pentru

Pasul 8. $x = a_0$; $f = 0$

Pasul 9. pentru $i = n, 0, -1$ execută

$$f = a_i + x * f$$

sfârșit pentru

Pasul 10. dacă $f = 0$ atunci

afișăm x,″ ″ sfârșit dacă

Pasul 11. $f = 0$

Pasul 12. pentru $i = n, 0, -1$ execută

$$f = a_i + (-x) * f$$

sfârșit pentru

Pasul 13. dacă $f = 0$ atunci

afișăm $-x$

sfârșit dacă

Observația 2. Verificarea condiției de soluție a ecuației (1) pentru $x = \pm a_0$ se realizează la sfârșitul algoritmului prin pașii 8-13.

Observația 3. Algoritmul 2 calculează valoarea $f(x)$ folosind $2(n+1)(1+a_0/2) = (n+1)(2+a_0)$ comparații.

4 Rezolvarea ecuațiilor de forma $f(x) + g(y) = 0$ în mulțimea numerelor întregi

În continuare vom considera $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ și $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_mX^m$ două polinoame de gradul n, respectiv m, unde $n, m \geq 1$ cu coeficienți întregi. Dorim să scriem un algoritm eficient de determinare a soluțiilor întregi pentru ecuația:

$$f(x) + g(y) = 0,\ x \text{ și } y \text{ numere întregi din } [u, v]. \tag{2}$$

u și v sunt numere întregi date, $u \leq v$.

(2) este echivalentă cu $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + b_0 + b_1y + \ldots + b_my^m = 0$, adică

$$(a_0 + g(y)) + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0. \tag{3}$$

Pentru rezolvarea ecuației (3) vom parcurge toate valorile lui $y : u, u+1, \ldots, v$ și pentru fiecare folosim Algoritmul 2 cu termenul liber $a_0 + g(y)$.

Algoritmul 3. Date de intrare: $n, a_0, a_1, \ldots, a_n, m, b_0, b_1, \ldots, b_m, u, v$

Date de ieșire: x, y (soluțiile ecuației 3)

Pasul 1. citim $n, a_0, a_1, \ldots, a_n, m, b_0, b_1, \ldots, b_m, u, v$

Pasul 2. pentru $y = u, v$ execută

Pasul 3. Folosim algoritmul 2 cu termenul liber $a_0 + g(y)$ și la fiecare soluție afișăm x, y

sfârșit pentru

Observația 4. Algoritmul 3 calculează valoarea $f(x)$ folosind $(n+1)(2 + a_0 + g(y))$ comparații de $v - u$ ori, y cu valorile $u, u+1, \ldots, v$. Astfel numărul de comparații este $(n+1)(2+a_0)(v-u) + (g(u) + g(u+1) + \ldots + g(v))(n+1)$.

5 Implementare și rezultate

Pentru implementarea Algoritmilor 2 și 3 am folosit limbajul C++. Programele sunt prezentate în continuare.

5.1 Implementarea algoritmului 2

```
# include <iostream>
# include <math.h>
using namespace std;

int n, a[100];
void read_data(){
int i;
cin>>n;
for(i=0;i<=n;i++)
    cin>>a[i];
}
unsigned long long f(int n, int a[],int x){
```

```
unsigned long long s = 0;
int i;
for(i=n;i>=0;i--)
    s = a[i] + x * s;
return s;
}
void solve_ec(int n, int a[]){
int x;
unsigned long long s;
for(x=1;x<=fabs(a[0])/2;x++){
    s = f(n,a,x);
    if(s == 0) cout<<x<<"␣";
    s = f(n,a,-x);
    if(s == 0) cout<<-x<<"␣";
}
x = fabs(a[0]);
s = f(n,a,x);
if(s == 0) cout<<x<<"␣";

if(a[0]!=0){
    s = f(n,a,-x);
    if(s == 0) cout<<-x<<"␣";
}
}
int main()
{
    read_data();
    solve_ec(n,a);
    return 0;
}
```

În tabelul 5.1 sunt prezentate câteva rezultate obținute cu implementarea 5.1

Ecuația	**Date de intrare**	**Date de ieșire (soluțiile întregi ale ecuației)**
$x^2+6x+9=0$	2 9 6 1	-3
$x^2+3x+2=0$	2 2 3 2	-1 -2
$x^2+3x+9=0$	2 9 3 1	
$x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1=0$, din [3]	5 1 1 -2 -2 1 1	1 -1
$2x^3-x^2+x-2=0$, din [3]	3 -2 1 -1 2	1
$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$, din [2]	3 -18 -12 0 2	3

Tabelul 5.1 Câteva rezultate obținute cu programul C++ din implementarea 5.1

5.2 Implementarea algoritmului 3

```
# include <iostream>
# include <math.h>
using namespace std;

int n, a[100], m, b[100], u, v;
void read_data(){
int i;
cin>>n;
for(i=0;i<=n;i++)
    cin>>a[i];
cin>>m;
for(i=0;i<=m;i++)
    cin>>b[i];
cin>>u>>v;
}
unsigned long long f(int n, int a[],int x){
unsigned long long s = 0;
int i;
for(i=n;i>=0;i--)
    s = a[i] + x * s;
return s;
}
void solve_ec1(int n, int a[], int y, int u, int v){
int x;
unsigned long long s;
for(x=1;x<=fabs(a[0])/2;x++){
    s = f(n,a,x);
    if(s == 0 && x>=u && x<=v)
        cout<<x<<"␣"<<y<<endl;
    s = f(n,a,-x);
    if(s == 0 && -x>=u && -x<=v)
        cout<<-x<<"␣"<<y<<endl;
}
x = fabs(a[0]);
s = f(n,a,x);
if(s == 0 && x>=u && x<=v)
    cout<<x<<"␣"<<y<<endl;
if(a[0]!=0){
    s = f(n,a,-x);
    if(s == 0 && -x>=u && -x<=v)
        cout<<-x<<"␣"<<y<<endl;
}
}
void solve_ec2(int n, int a[], int m, int b[], int u, int v){
int c[100],i,y;
for(i=1;i<=n;i++)
        c[i] = a[i];
for(y=u;y<=v;y++){
    c[0] = a[0] + f(m,b,y);
    solve_ec1(n,c,y,u,v);
}
}
int main()
{
```

```
    read_data();
    solve_ec2(n,a,m,b,u,v);
    return 0;
}
```

În tabelul 5.2 sunt prezentate câteva rezultate obținute cu implementarea 5.2

Ecuația	**Date de intrare**	**Date de ieșire (soluțiile întregi ale ecuației)**
$x + y^2 + 1 = 0$ $u = -3, v = 2$	1 0 1 2 1 0 1 -3 2	-2 -1 -1 0 -2 1
$x^3 - y^3 = 999$, din [4] $u = 0, v = 999$	3 0 0 0 1 3 -999 0 0 -1 0 999	10 1 12 9
$y^3 - x^3 = 91$, din [4] $u = 0, v = 100$	3 0 0 0 1 3 91 0 0 -1 0 100	5 6
$x^2 - 16 = y^3$, din [1] $u = -100, v = 100$	2 -16 0 1 3 0 0 0 -1 -100 100	4 0 -4 0
$3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$, din [2] $u = -100, v = 100$	2 1 0 3 2 0 0 -7 -100 100	3 -2 -3 -2 3 2 -3 2
$y^2 = x^3 + (x + 4)^2$, din [2] $u = -100, v = 100$	3 16 8 1 1 2 0 0 -1 -100 100	0 -4 0 4

Tabelul 5.2 Câteva rezultate obținute cu programul C++ din implementarea 5.2

6 Concluzii

Sperăm că articolul acesta va fi util rezolvării unor ecuații diofantice cu anumite restricții. Programele prezentate pot fi rulate și pentru alte ecuații existente în bibliografie sau alte lucrări. Mai mult, credem că ideile expuse pot fi dezvoltate și extinse pentru alte clase de ecuații diofantice.

Bibliografie

[1] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, 1963.

[2] W. Sierpinski, 250 *Problemes of Elementary Number Theory*, Collection Hachette Universite, 1972.

[3] C. Năstăsescu, C. Niță, S. Popa, *Matematică*, Manual pentru clasa a X-a. Algebră, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993.

[4] P. Radovici-Mărculescu, *Probleme de teoria elementară a numerelor*, Editura Tehnică, București, 1986.

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Elemente de interfață specifice mediului grafic interactiv Scratch

Doru Anastasiu Popescu [1]

Mediile grafice interactive permit rezolvarea unor categorii de probleme folosind algoritmi. Instrucțiunile, expresiile și operatorii sunt definite prin blocuri reprezentate prin figuri geometrice, care permit configurări specifice. Două dintre cele mai populare medii grafice interactive sunt: Scratch – pentru derularea unor activități reprezentate grafic și Mindstorms Education EV3 – pentru programarea roboților Lego. Ambele medii grafice se pot instala gratuit și folosesc noțiunea de proiect. Un proiect conține toate fișierele necesare rezolvării unei probleme cu un algoritm. Secvența de instrucțiuni ce formează un algoritm se numește *script* în mediul grafic Scratch, iar în Mindstorms Education EV3 *program*. În continuare vom prezenta mediul grafic Stratch 2.0. Instalarea mediului este foarte simplă, folosind site-ul https://scratch.mit.edu/scratch2download/.

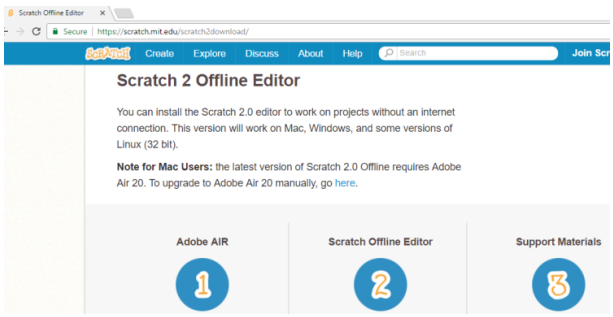

Scratch Offline Editor
Secure | https://scratch.mit.edu/scratch2download/
Create
Explore
Discuss
About
Help
Search
Join Scr
Scratch 2 Offline Editor
You can install the Scratch 2.0 editor to work on projects without an internet connection. This version will work on Mac, Windows, and some versions of Linux (32 bit).
Note for Mac Users: the latest version of Scratch 2.0 Offline requires Adobe Air 20. To upgrade to Adobe Air 20 manually, go here.
Adobe AIR
Scratch Offline Editor
Support Materials
1
2
3

Figura 1. Kit-ul de instalare Scratch 2

Lansarea în execuție a mediului conduce la fereastra din figura 2.

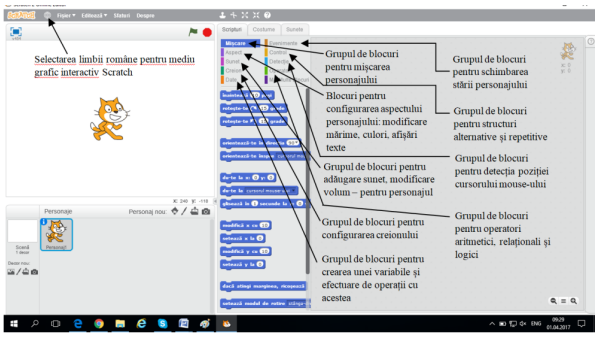

Selectarea limbii române pentru mediu grafic interactiv Scratch
Grupul de blocuri pentru mișcarea personajului
Blocuri pentru configurarea aspectului personajului: modificare mărime, culori, afișări texte
Grupul de blocuri pentru adăugare sunet, modificare volum – pentru personajul
Grupul de blocuri pentru configurarea creionului
Grupul de blocuri pentru crearea unei variabile și efectuare de operații cu acestea
Grupul de blocuri pentru schimbarea stării personajului
Grupul de blocuri pentru structuri alternative și repetitive
Grupul de blocuri pentru detecția poziției cursorului mouse-ului
Grupul de blocuri pentru operatori aritmetici, relaționali și logici

Figura 2. Interfața mediului grafic interactiv Scratch

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

În fereastra de lucru se disting mai multe zone. În partea stângă apare un personaj implicit, numit Scratch, care poate fi înlocuit sau completat cu alte personaje folosind opțiunile din partea de jos a ferestrei. Acolo este *scena* unde se văd efectele scripturilor, care se scriu în partea din dreapta. În mijlocul ferestrei se găsesc grupurile de blocuri ce pot fi folosite prin crearea lor în zona din dreapta. Blocurile din același grup sunt colorate la fel. Introducerea în script a unui bloc se realizează prin glisarea blocului în zona din dreapta și completarea datelor cu valorile dorite. În figura 3 se află un script, pentru poziționarea personajului în centru scenei, apoi deplasarea lui în două etape, câte 100 pixeli la fiecare dintre acestea și staționarea câte o secundă după fiecare etapă. Scena dispune de un sistem de coordonate cu centru în mijlocul ei (axa Ox pe orizontală – sensul pozitiv la dreapta, iar axa Oy pe verticală – sensul pozitiv în sus), iar unitatea de măsură pentru deplasare este pixel-ul.

Figura 3. Exemplu de script pentru deplasarea personajului

Din exemplu se observă faptul că scriptul începe cu un bloc de start, prin care acesta se activează folosind un click de mouse, după care urmează blocurile dorite. Forma acestora arată dacă se pot lega unele de altele.

Putem crea mai multe scripturi pentru același personaj, așa cum se observă în figura 4.

Figura 4. Mai multe scripturi pentru același personaj

Primul script se activează când se dă un click pe personaj, iar al doilea când se dă un click pe steguleț verde. Folosind opțiunea *Alege personaj din bibliotecă*, putem selecta personaje,

dintr-o bibliotecă de imagini, pe care să le aducem pe scenă. În aplicații vom folosi mai multe personaje. În figura 5 avem două personaje, reprezentate prin doi fluturi, pentru fiecare avem create câte un script, necesar deplasării pe scenă. Înainte de scrierea scriptului se selectează personajul (prin click pe imaginea personajului din stânga jos a ferestrei), pentru a se realiza asocierea între personaj și script.

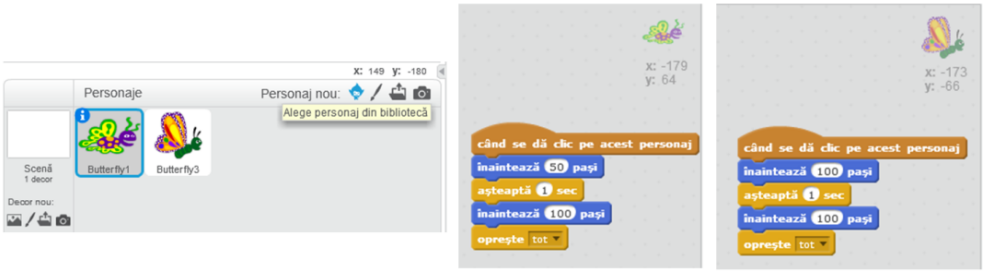


Figura 5. Exemplu cu două personaje

Imaginile ce conțin personaje pot fi prelucrate, folosind aplicația Paint, care va fi activată folosind butonul *Costume*. Prelucrarea se referă la schimbarea culorilor contururilor închise, desenarea unor figuri geometrice folosind diverse culori, inserarea de imagini, duplicarea acestora, etc. În figura 6 este un exemplu de folosire a editorului grafic.

În blocurile puse la dispoziție de către mediul Scratch putem să introducem valori constante, variabile sau expresii pentru a realiza operația dorită cu personajul asociat. Variabilele se pot crea folosind grupul de blocuri *Date*. Acest grup de blocuri permite efectuarea următoarelor operații cu o variabilă:

1. *setarea* valorii variabilei cu o valoare ce trebuie introdusă în bloc;
2. *modificarea* valorii variabilei cu o valoare ce trebuie introdusă în bloc;
3. *afișarea* valorii unei variabile;
4. *ascunderea* unei variabile, adică variabila nu se mai afișează.

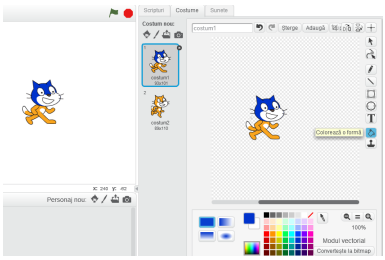


Figura 6. Editorul grafic din Scratch

Fiecare bloc permite selectarea numelui variabilei, dintr-o listă cu numele variabilelor existente la momentul respectiv. Pentru a se afișa numele variabilei și valoarea ei pe scenă, trebuie ca variabila să aibă bifată căsuța de lângă numele ei, spre exemplu dacă avem două variabile a și b, cu căsuța lui b bifată, atunci pe scenă, în colțul din dreapta sus va apare doar variabila b cu valoarea sa.

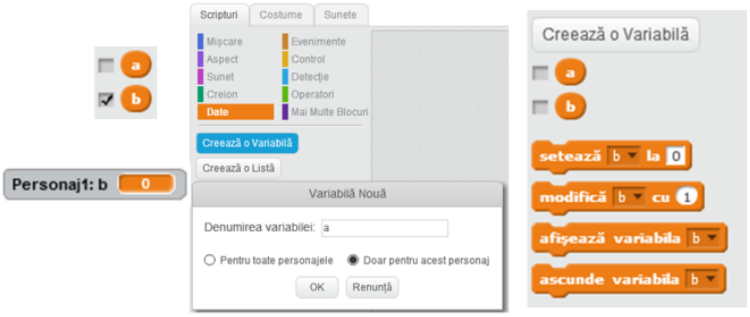


Figura 7. Folosirea variabilelor in Scratch

Folosirea expresiilor în blocuri presupune utilizarea operatorilor aritmetici, relaționali și logici, care se găsesc în grupul de blocuri *Opertori*. Ca să vedem cum funcționează aceste blocuri, vom crea două variabile a și b, le vom seta cu valorile 10 și 20, după care vom afișa suma și produsul lor, folosind alte două variabile S și P. Scriptul care face acest lucru conține: blocul de start, două blocuri de setare a valorilor lui a și b, un bloc pentru setarea lui S, cu suma $a + b$, un bloc pentru afișarea lui S și apoi blocurile pentru P. Menționăm că trebuie formate mai întâi blocurile expresie cu suma, respectiv produsul și apoi acestea se vor introduce în blocurile de setare a variabilelor S și P. În expresii se vor introduce prin glisare blocurile cu numele variabilelor. Figura 8 conține scriptul pentru suma și produsul valorilor din două variabile numerice.

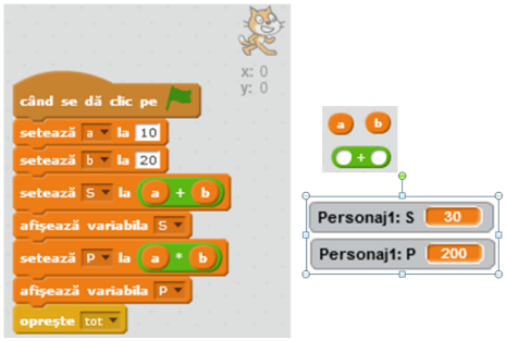


Figura 8. Suma și produsul a două numere

Modul de folosire a operatorilor relaționali este asemănător cu cel al operatorilor aritmetici. Un script care afișează valoarea de adevăr pentru expresiile $a > b$, $a < b$, $a = b$, unde a și b au valori generate aleator din mulțimea $\{0, 1, ..., 100\}$ este prezentat în figura 9.

Personaj1: a 59
Personaj1: b 54
Personaj1: L false
când se dă clic pe
setează a la alege un număr aleatoriu între 1 și 100
afișează variabila a
setează b la alege un număr aleatoriu între 1 și 100
afișează variabila b
setează L la a < b
afișează variabila L
oprește tot

Figura 9. Compararea valorilor variabilelor

Tipul variabilelor este stabilit odată cu inițializarea lor. Inițializarea variabilei cu o valoare numerică va conduce la o variabilă cu tipul numeric, operațiile permise fiind cele aritmetice și

relaționale. Dacă o variabilă primește ca valoare o expresie logică, atunci aceasta va avea tipul logic, alcătuit din două constante: *true* și *false*. Operatorii logici ce pot fi folosiți cu variabile de tip logic sunt *nu*, *și*, respectiv *sau* (negația, conjuncția și disjuncția). În scriptul din figura 10 se generează aleator valori din mulțimea $\{0, 1, \ldots, 9\}$ pentru variabilele a, b și se afișează valoarea de adevăr a unei expresii logice memorată în variabila de tip logic L.

Personaj1: a 9
Personaj1: b 7
Personaj1: L true
când se dă clic pe
setează a la alege un număr aleatoriu între 0 și 9
afișează variabila a
setează b la alege un număr aleatoriu între 0 și 9
afișează variabila b
setează L la nu a < 5 sau b < 5
afișează variabila L
oprește tot

Figura 10. Script cu operatori logici

Personajele pot avea asociate scripturi care să conțină sunete. Blocurile pentru sunete se găsesc în grupul *Sunet*. Acest grup conține blocuri pentru modificarea volumului sunetului, pentru selectarea unui instrument și pentru înregistrarea de sunete ce pot fi folosite de către personaj. În scriptul din figura 11 personajul se poziționează la coordonatele $x = -180$, $y = 0$ așteaptă o secundă, după care scoate sunetul *miau*, apoi se deplasează de 3 ori câte 100 pixeli, stă o secundă și apoi scoate sunetul *miau*.

Figura 11. Script cu sunete

Probleme propuse spre rezolvare

Pentru fiecare din problemele următoare scrieți câte un script folosind mediul grafic interactiv Scratch, folosind specificațiile din figura 12.

1. Deplasați o minge pe mijlocul scenei de la stânga la dreapta.

2. Simulați decolarea unui avion, pornind din colțul stânga-jos al scenei și zburând spre colțul din dreapta-sus.

3. Selectați ca personaj un câine, vopsiți blana folosind culoarea galbenă și apoi deplasați-l de la stânga la dreapta pe scenă, astfel încât la fiecare 100 de pixeli parcurși să stea o secundă și să scoată un sunet specific.

4. Alegeți ca personaje pe scenă o vulpe și un cățeluș. Derulați evenimentele necesare pentru ca la un clik pe fiecare acestea să se deplaseze de 3 ori, câte 100 de pixeli și să se odihnească câte 2 secunde la fiecare oprire.

5. Atribuiți unei variabile cu numele k o valoare generată aleator de exact două cifre și apoi afișați valoarea de adevăr a propoziției logice $k\,rest\,2 = 0$. *rest* este operatorul logic pentru restul împărțirii a două numere naturale (în secțiunea algoritmi s-a folosit operatorul % sau *mod*).

6. Creați trei variabile cu numele a, b, c, apoi inițializați pe fiecare dintre ele cu o cifră generată aleator, după care afișați suma lor.

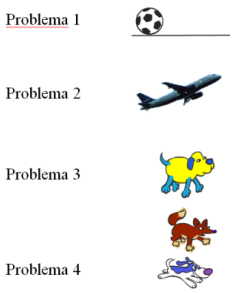


Figura 12. Personajele pentru problemele propuse spre rezolvare

Bibliografie

[1] https://scratch.mit.edu/scratch2download/

[2] D.A. Popescu, *Programarea roboților Lego folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 2, 2018.

[3] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de informatică pentru clasa a V-a*, Editura CD-Press, 2017.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Roxana Maria Manea[1]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Jumătatea jumătății numărului 104 reprezintă numărul:
   a) 72; b) 13; c) 26; d) 36.
2. Dacă $a = 7$ și $b = 9$, atunci diferența dintre triplul numărului a și dublul numărului b este egală cu:
   a) 3; b) 8; c) -2; d) 4.
3. Probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{0,\ 2,\ 15,\ 18,\ 36\}$, acesta să fie multiplu de 6 este egală cu:
   a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{5}{2}$.
4. Dacă $2x + 3y = 9$, atunci $4x + 6y - 16$ este egal cu:
   a) -7; b) 18; c) 2; d) 27.
5. La un concurs de șah organizat pe echipe în cadrul unei școli gimnaziale au fost înregistrate următoarele punctaje:

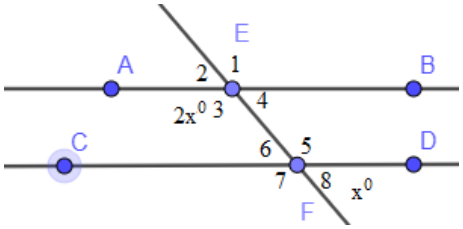
Echipa 1	Echipa 2	Echipa 3	Echipa 4
100 puncte	98 puncte	115 puncte	102 puncte

   a) 2 puncte; b) 13 puncte; c) 4 puncte; d) 17 puncte.
6. Bunica a pregătit pentru iarnă zacuscă de ciuperci depozitând-o astfel: 3 borcane de 200 g, 2 borcane de 400 g, 1 borcan de 800 g. Câte kilograme de zacuscă a pregătit bunica?
   a) 3 kg; b) 2,6 kg; c) 1,8 kg; d) 2,2 kg.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dreptele AB și CD, din figura alăturată, sunt paralele, iar dreapta EF este secanta lor. Unghiul E_1 are măsura egală cu:
   a) 90°; c) 60°;
   b) 120°; d) 90°.



2. Dacă suplementul unui unghi este egal cu triplul complementului său, atunci unghiul are măsura egală cu:

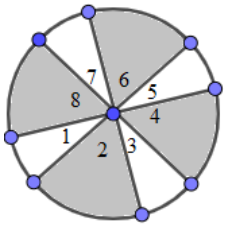
[1]Profesor, Școala Gimnazială „Nicolae Crevedia”, roxam86@yahoo.com

a) 60°;
b) 30°;
c) 35°;
d) 120°.

3. Suma tuturor dimensiunilor unui dreptunghi este egală cu 30 cm. Dacă dublul lungimii este egal cu triplul lățimii, atunci aria dreptunghiului este egală cu:

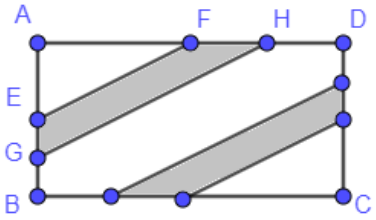
a) 144 cm^2;
b) 72 cm^2;
c) 90 cm^2;
d) 54 cm^2.

4. Figura alăturată reprezintă o roată cu spițe. Dacă au loc relațiile de congruență, $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$, $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$ și $\sphericalangle 6$ egal cu dublul $\sphericalangle 3$, atunci unghiurile $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 5$ au măsurile:



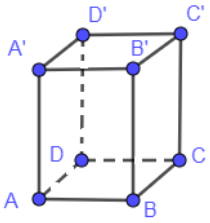
a) 50°, respectiv 40°;
b) 100°, respectiv 50°;
c) 60°, respectiv 100°;
d) 60°, respectiv 30°.

5. Ionel a cumpărat plăci de gresie, fiecare placă având modelul din figura alăturată. Punctele E, F, G, H sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AD]$, $[EB]$, respectiv $[FD]$, $GB = 2,5$ cm și $HD = 6$ cm. În aceste condiții $[BD]$ are lungimea de:



a) 13 cm;
b) 36 cm;
c) 26 cm;
d) 24 cm.

6. O bucată de lemn în formă de paralelipiped dreptunghic având dimensiunile de 6 dm, 4 dm și înățimea de 8 dm a fost secționată printr-un plan paralel cu baza la înățimea $\frac{3}{4}$ față de bază. Volumul corpului mic rezultat în urma secțiunii este de:



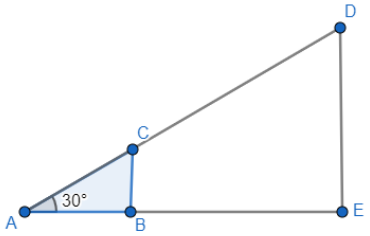
a) 42 dm^3;
b) 144 dm^3;
c) 48 dm^3;
d) 24 dm^3.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

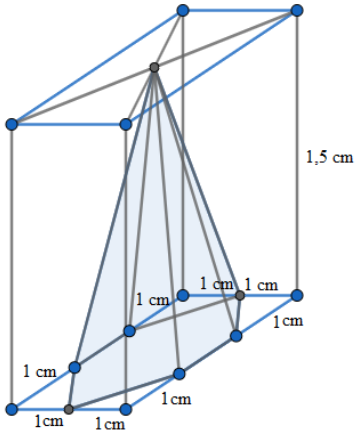
1. Se știe că $2x + 5y = 64$ și $x + 4z = 22$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   a) Aflați rezultatul calculului, $3x + 10y - 4z$.
   b) Determinați valorile posibile ale numărului z, pentru care numărul y este natural.
2. Se consideră expresia: $E(x) = 1 + \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2} : \left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2}\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\ -3\}$.
   a) Arătați că $2x^2 + 5x - 3 = (x + 3)(2x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
   b) Determinați $n \in \mathbb{N}$, pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.
3. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ și $g(x) = 2f(x)$.
   a) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
   b) Aflați aria triunghiului format de graficele celor două funcții cu axa ordonatelor.

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul $\triangle ABC$ dreptunghic în $\sphericalangle B$, cu $AB = 3\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle A = 30^0$. Se prelungește latura AC, astfel încât $CD = 2AC$. Perpendiculara dusă din D intersectează AB în punctul E.



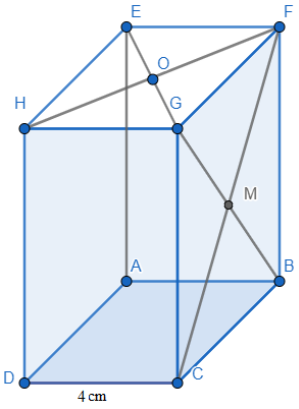
   a) Arătați că $BC = 3$ cm.
   b) Aflați aria trapezului $BCDE$.

5. Dintr-un cristal în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm,2 cm, respectiv 2,7 cm s-a obținut, prin șlefuire, un cristal în formă de piramidă hexagonală având înălțimea egală cu cea a cristalului inițial, ca în figura alăturată.



   a) Arătați că volumul piramidei este egal cu 3,6 cm^3.
   b) Ambalajul cristalului, aflat în forma finală, are aspectului unei cutii cubice. Cât la sută din capacitatea cutiei ocupă cristalul?

6. Pe o tavă sunt așezate 10 pahare în formă de prismă dreaptă cu baza pătrat având muchia bazei de 4 cm. Dintr-o sticlă de 1 litru se toarnă apă în mod egal în toate cele 10 pahare până la terminarea apei.



   a) Arătați că înălțimea apei din fiecare pahar este egală cu 6,25 cm.
   b) Arătați că avem $MO \perp BC$, unde $HF \cap EG = \{O\}$, $CF \cap BG = \{M\}$.

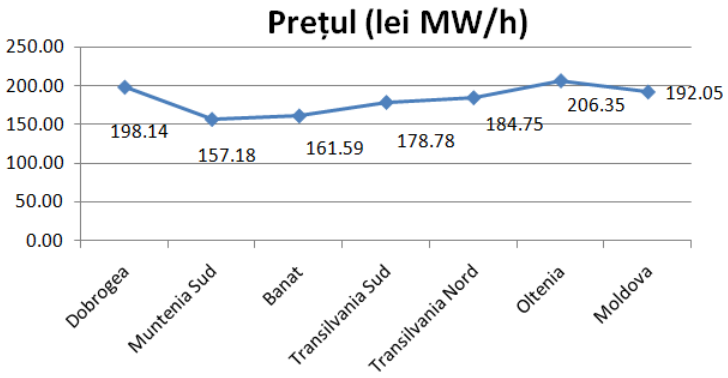
Testul 2

Lavinia-Victoria Dumitrana[2]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dintre numerele $5^{10}, 625^2, 25^3$ și 125^4 este mai mare numărul:
   a) 625^2; b) 5^1; c) 25^3; d) 125^4.
2. Ion merge 30 km, respectiv o pătrime din lungimea unui drum. Sora lui parcurge 70% din lungimea aceluiași drum. Câți kilometri a parcurs sora lui Ion?
   a) 90 km; b) 84 km; c) 120 km; d) 63 km.
3. A 2005-a zecimală a numărului $0,(1423)$ este:
   a) 3; b) 2; c) 4; d) 1.
4. Media geometrică a numerelor $4+\sqrt{12}$ și $4-2\sqrt{3}$ este:
   a) 3; b) 4; c) 1; d) 2.
5. Dorel vrea să schimbe furnizorul de energie electrică. În diagrama de mai jos sunt afișate cele mai mici prețuri pentru furnizorii de energie pe zone geografice.



   Diferența dintre cea mai mare valoare și cea mai mică valoare de preț din diagramă este de:
   a) 49,17; b) 44,76; c) 27,57; d) 32,42.
6. Câtul dintre cel mai mic multiplu al numerelor 18 și 24 și cel mai mare divizor comun al numerelor 24 și 36 este:
   a) 4; b) 6; c) 3; d) 8.
7. Inversul numărului $b = 0,(2) + \frac{3}{2}$ este:
   a) $\frac{17}{10}$; b) $\frac{18}{31}$; c) $-\frac{31}{18}$; d) $\frac{27}{31}$.

SUBIECTUL al II-lea

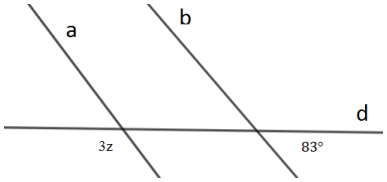
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Pe o dreaptă d se consideră 4 puncte coliniare A, B, C, D. Care este ordinea corectă a punctelor pe dreapta d, dacă $AB = 3$ cm, $AC = 2$ cm, $BC = 5$ cm și punctul D este mijlocul segmentului $[AC]$?

[2]Profesor, Școala Gimnazială Bircii, Scornicești, lavi_ionica@yahoo.com

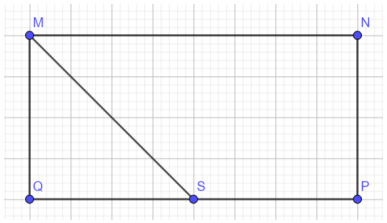
a) A, B, D, C; b) A, D, C, B; c) B, A, D, C; d) C, B, D, A.

2. În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele. Valoarea lui z este egală cu:



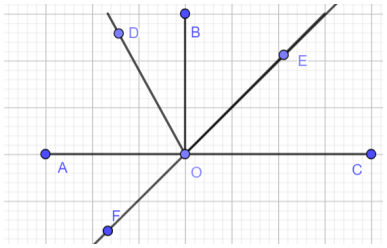
a) $32°20'$; c) $24°30'$;
b) $27°40'$; d) $16°24'$.

3. Anton are o grădină cu flori în formă dreptunghiulară ca în figura alăturată. El vrea să planteze ghiocei pe suprafața MQS. Dacă $NP = 4$ cm, $MN = 8$ cm și S este mijlocul segmentului QP, atunci suprafața plantată de Anton cu ghiocei reprezintă:



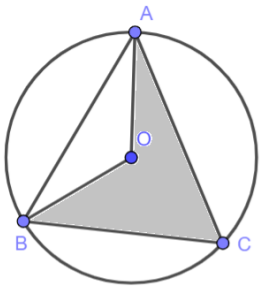
a) $\frac{1}{3} \cdot S_{ABCD}$; b) $\frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$; c) $\frac{1}{6} \cdot S_{ABCD}$; d) $\frac{1}{4} \cdot S_{ABCD}$.

4. În figura alăturată avem $BO \perp AC$, semidreapta $[OE$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și semidreapta $[OF$ este semidreapta opusă semidreptei $[OE$, iar semidreapta $[OD$ este bisectoarea unghiul $\sphericalangle AOE$. Măsura $\sphericalangle DOB$ este egală cu:



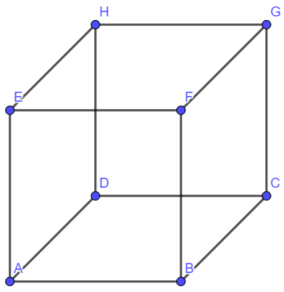
a) $85°30'$; b) $22°30'$; c) $67°30'$; d) $43°30'$.

5. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de centru O și rază $6\sqrt{3}$ cm. Suprafața hașurată reprezintă:



a) $54\sqrt{3}$ cm^2 c) $108\sqrt{3}$ cm^2
b) $81\sqrt{3}$ cm^2 d) $72\sqrt{3}$ cm^2.

6. O cutie de chibrituri are dimensiunile 10 mm, 35 mm și 50 mm. Dacă volumul unui băț este de 450 mm^3, atunci numărul maxim de bețe aflate într-o cutie este de:



a) 31 bețe; c) 38 bețe;
b) 26 bețe; d) 50 bețe.

SUBIECTUL al III-lea

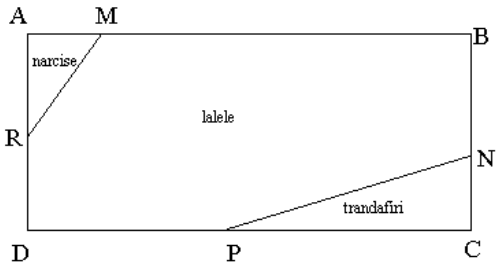
Scrieți rezolvările complete.

1. Suma dintre vârsta Sofiei și a părinților ei este de 80 de ani. Tatăl Sofiei este cu 7 ani mai în vârstă decât mama, iar mama este cu 2 ani mai mare decât de 11 ori vârsta Sofiei.
   a) Determinați vârstele celor trei membri ai familiei.
   b) Aflați cu câți ani în urmă vârsta tatălui era dublul vârstei mamei.
2. Se consideră expresia: $E(x) = \frac{2 \cdot (x+3)}{2x+5} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x}\right) : \frac{2x^2 - 5x - 25}{5x}$, $\forall x \in \left\{-\frac{5}{2}; 0; 5\right\}$.

a) Demonstrați că: $2x^2 - 5x - 25 = (2x + 5) \cdot (x - 5)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că: $E(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

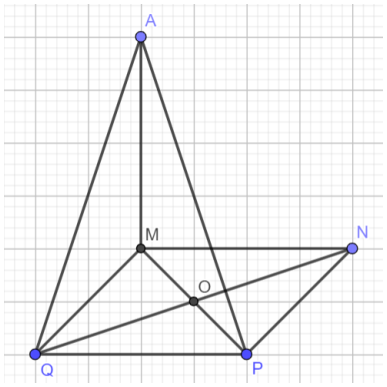
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$.
   a) Aflați coordonatele punctului M, unde M este piciorul perpendicularei duse din O la graficul funcției f.
   b) Determinați a și b, știind că punctul $T(a, b) \in G_f$ și îndeplinește condiția: $f(a + b) = 2 \cdot f(3a + 2b)$.

4. În figura alăturată este ilustrată schematic o grădină cu flori sub formă de dreptunghi $ABCD$ cu lungimea de două ori mai mare decât lățimea. Pe suprafețele AMR și CNP sunt plantate narcise, respectiv trandafiri. Se cunosc $A_{ABCD} = 200$ m^2, $AM = CN = 3$ m, R este mijlocul $[AD]$, iar P este mijlocul $[DC]$.

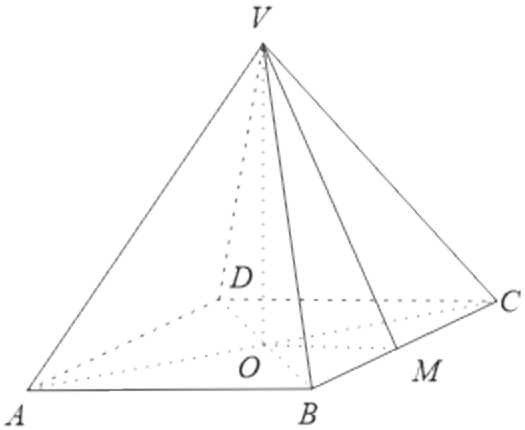


   a) Arătați că aria suprafeței AMR este egală cu jumătate din aria suprafeței CNP.
   b) Pe suprafața rămasă liberă se plantează lalele. Știind că se recoltează 20 fire de lalea pe 1 m^2, iar un fir de lalea se vinde cu 1,5 lei, calculați ce sumă se obține din vânzarea lalelelor.

5. Pe planul pătratului $MNPQ$ cu $MN = 4$ cm se ridică perpendiculara AM cu lungimea de 4 cm.
   a) Arătați că $d(A, QN) = 2\sqrt{6}$ cm.
   b) Calculați sin $\left(\widehat{QAP}\right)$.



6. O bomboană de pom este reprezentată schematic sub formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu toate muchiile egale cu 6 cm.
   a) Arătați că înălțimea piramidei VO este egală cu $3\sqrt{2}$ cm.
   b) Bomboanele se ambalează în cutii sub formă de cub cu muchia de 15 cm. Determinați câte bomboane încap într-o cutie. (Se consideră $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$).



Testul 3

Raluca Mihaela Georgescu [3]

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Numărul $10^n + 17$, $n \in \mathbb{N}^*$ este divizibil cu:
   a) 3; b) 2; c) 25; d) 5.
2. 20% din media aritmetică a numerelor 121, 139, 145 este egal cu:
   a) 57; b) 27; c) 58; d) 19.
3. Valoarea naturală a lui n pentru care $3^{112} - 3^{111} - 3^{110} = 5 \cdot 3^{2n}$ este:
   a) 20; b) 48; c) 55; d) 0.
4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,4)$, $C(0,2)$. Lungimea medianei dusă din vârful A este:
   a) 1; b) 4; c) 2; d) 3.
5. Numărul raţional şi pozitiv n, pentru care are loc relaţia $\sqrt{2^3 - 4\sqrt{n}} = \sqrt{7}$ este:
   a) 1/5; b) 4; c) 16; d) 1/16.
6. Numărul reprezentat prin $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \sqrt{6}$ este un număr raţional, este o afirmaţie:
   a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie $ABCD$ trapez având $AB \| CD$, $CD < AB$ şi $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{1}{3}$. Lungimea liniei mijlocii a trapezului este:
   a) AB; b) CD; c) $2CD$; d) $2AB$.
2. Se consideră ABC triunghi dreptunghic, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$. Dacă $\cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} = \dfrac{7}{5}$ şi $AB + AC = 14$ cm, atunci lungimea ipotenuzei este egală cu:
   a) 15 cm; b) 10 cm; c) 20 cm; d) 12 cm.
3. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ şi $BC = 16$ cm. Dacă aria triunghiului ABC este egală cu 48 cm^2, atunci lungimea razei cercului înscris triunghiului ABC este egală cu:
   a) 8 cm; b) 8/3 cm; c) 24 cm; d) 3 cm.
4. Fie $ABCD$ pătrat, $AC \cap BD = \{O\}$ şi punctul M este mijlocul laturii AB. Raportul dintre aria triunghiului MOB şi aria pătratului este egal cu:

[3]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

a) 1/2; b) 1/4; c) 1/6; d) 1/8.

5. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O,R)$ şi punctele A, B sunt situate pe cerc astfel încât triunghiul AOB este echilateral, având lungimea laturii $AB = 6$ cm. Lungimea arcului de cerc mic $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu:

   a) 2π cm; b) 36 cm; c) 6π cm; d) 12π cm.

6. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt invers proporţionale cu numerele $3^{-1}, 4^{-1}, 5^{-1}$, iar suma lungimilor laturilor sale este egală cu 96 cm. Lungimea diagonalei paralelipipedului este egală cu:

   a) 6 cm; b) 12 cm; c) $\sqrt{12}$ cm; d) $10\sqrt{2}$ cm.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieţi rezolvările complete.

1. Media aritmetică a două numere naturale este egală cu 6, iar media lor armonică este egală cu $\frac{8}{3}$.
   (a) Stabiliţi dacă suma numerelor este 12.
   (b) Calculaţi media geometrică a celor două numere.
2. Se consideră expresia $E(x) = (3x-1)^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Determinaţi valoarea $E\left(\frac{1}{3}\right) + 1$.
   (b) Arătaţi că $E(x)$ este divizibilă cu 3, pentru oricare valoare întreagă a lui x.
3. Se consideră funcţia liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + 3$, unde $m \in \mathbb{R}$.
   (a) Determinaţi valoarea lui m, ştiind că graficul funcţiei f trece prin punctul $A(2,5)$.
   (b) Pentru $m = 1$, determinaţi valorile întregi ale lui x, $x \neq -2$, pentru care $\frac{5}{f(x)-1} \in \mathbb{Z}$.
4. Fie paralelogramul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi BC, iar G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ADB şi DBC.
   (a) Dacă $OM = 5$ cm şi $ON = 6$ cm, calculaţi perimetrul paralelogramului $ABCD$.
   (b) Arătaţi că $AG_1 = \frac{AC}{3}$.
5. Secţiunea axială a unui cilindru circular drept este dreptunghiul $ABCD$, având dimensiunile $AB = 6$ cm şi $AD = 4$ cm şi punctul O centru bazei. Determinaţi:
   (a) sinusul unghiului format de dreptele DO şi CO.
   (b) distanţa de la punctul C la dreapta DO.
6. Se consideră prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, cu $AB = AA' = 12$ cm. Fie punctul M situat pe dreapta AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = 2$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $NC = 4$ cm. Să se determine:
   (a) tangenta unghiului format de dreapta $A'M$ cu planul (ABC).
   (b) cosinusul unghiului format de planul $(A'MN)$ cu planul (ABC).

Testul 4

Florentina-Alina Ştefan[4]

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Valoarea cifrei x pentru care $\overline{x0x} + \overline{xx} + x = 678$ este:
   a) 3; b) 4; c) 5; d) 6.
2. Mulţimea $(D_{12} \cap D_{20}) \setminus \{x \in \mathbb{N} : x|4\}$ este egală cu:
   a) $\{1, 2, 4\}$; b) $\emptyset$; c) $\{0\}$; d) $\{1, 2\}$.
3. Dacă 3 este soluţia ecuaţiei $mx + m + x = 15$, atunci valoarea naturală a lui m este:
   a) 3; b) 2; c) 1; d) 0.
4. Numărul fracţiilor supraunitare cu numărătorul 2022 este:
   a) 2022; b) 2021; c) 2020; d) 2023.
5. Dacă $\frac{2}{3} = \frac{a}{b}$, atunci calculând $6a^2b - 4ab^2$ obţinem:
   a) 2; b) 0; c) 5; d) 7.
6. Afirmaţia: „Cardinalul mulţimii $\{x \in \mathbb{Z} : \frac{5}{2x-1} \in \mathbb{Z}\}$ este egal cu patru” este:
   a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie triunghiul MNP, dreptunghic în N, astfel încât $NP = \frac{MN}{2}$. Notăm cu A mijlocul segmentului MN. Măsura unghiului $\sphericalangle NPA$ este egală cu:
   a) 30°; b) 45°; c) 90°; d) 60°.
2. Fie două unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 108°$, $m(\sphericalangle BOC) = 42°$ şi $[OM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$. Măsura unghiului $\sphericalangle COM$ este egală cu:
   a) 90°; b) 150°; c) 75°; d) 96°.
3. Aria paralelogramului $ABCD$, având vârfuri punctele $A(-2, 2)$, $B(5, 2)$, $C(0, -3)$, $D(-7, -3)$ este egală cu:
   a) 35 um^2; b) 28 um^2; c) 30 um^2; d) 24 um^2.
4. Fie $ABCD$ trapez isoscel, $AB \| CD$, $AB > CD$, $AD = DC = BC = 6$ cm, iar $m(\sphericalangle DCA) = 30°$. Lungimea bazei mari AB este egală cu:

[4]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, florentina.stefan@upit.ro

a) 6 cm; b) 12 cm; c) 18 cm; d) 9 cm.

5. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele M şi N mijloacele laturilor AB şi CC'. Dacă $MN = 3\sqrt{6}$ cm, atunci volumul cubului este:

a) 216 cm^3; b) 36 cm^3; c) 81 cm^3; d) 27 cm^3.

6. Se consideră $VABCD$ piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile congruente. Dacă aria triunghiului $\triangle VBC$ este egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2, atunci aria secţiunii diagonale VAC este egală cu:

a) 72 cm^2; b) 144 cm^2; c) $72\sqrt{2}$ cm^2; d) 12 cm^2.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieţi rezolvările complete.

1. Se consideră egalitatea: $(x-1)(x+1)(x+3) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
   a) Determinaţi cele trei numere reale a, b, c astfel încât să existe egalitatea de mai sus, pentru orice număr real x.
   b) Folosind valorile lui a, b, c determinate anterior, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $ax^2+bx+c < 3x^2$.
2. Se consideră numărul $a = \sqrt{1+2+3+...+120+363\cdot 7}$.
   a) Arătaţi că numărul a este raţional.
   b) Aflaţi cea mai mică valoare naturală a lui b pentru care $\sqrt{a+b} \in \mathbb{Q}$, unde valoarea lui a este determinată anterior.
3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.
   a) Să se calculeze $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   b) Determinaţi valoarea produsului $f(2) \cdot f(3) \cdot ... \cdot f(2022)$.
4. Fie expresia $E(x) = x(x+2)(x^2+2x-2)+1$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Demonstraţi că $E(a)$ este pătrat perfect, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.
   b) Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{E(x)-1}{x^2+2x} = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
5. Fie triunghiul isoscel ABC, $[AB] \equiv [AC]$, M, N, P mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, $BC = 12$ cm şi $AP = 8$ cm.
   a) Demonstraţi că patrulaterul $AMPN$ este romb.
   b) Calculaţi aria rombului $AMPN$.
6. Pe planul rombului $ABCD$, cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ şi $AB = 24$ cm se ridică perpendiculara AM, $AM = 10$ cm. Calculaţi:
   a) aria triunghiului $\triangle MBD$.
   b) distanţa de la punctul A la planul (MBD).

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Determinați partea imaginară a numărului complex $z = \dfrac{2-3i}{2+3i}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m - 1$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m, știind că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \sqrt{x^2+x+2} + \log_2 \dfrac{1}{3x-2} = 1$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra zecilor număr prim și cifra unităților să fie un divizor al lui 8.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$ și $B(3,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin simetricul lui A față de B și este perpendiculară pe AB.
6. Calculați $\cos 2x$, știind că $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ și $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
   a) Calculați $\det(B \cdot {}^tB)$, unde ${}^tB$ este transpusa matricei B.
   b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea A^2 are determinantul egal cu 2.
   c) Pentru $a = 1$, determinați matricea $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $X \cdot A = B$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 3xy$.
   a) Demonstrați că $x \circ y = \dfrac{1}{3} - 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(y - \dfrac{1}{3}\right)$, pentru orice numere reale x și y.
   b) Determinați numerele reale x pentru care $\dfrac{1}{9^x} \circ 27^{x+1} = \dfrac{1}{3}$.
   c) Calculați $\log_5 \sqrt[3]{1} \circ \log_5 \sqrt[3]{2} \circ \ldots \circ \log_5 \sqrt[3]{2022}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{4(x+1)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.
   b) Determinați ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.
   c) Demonstrați că $e^x + \sqrt{5e^{2x}+20} \geq 4$, pentru orice număr real x.
2. Se consideră funcția $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_2^{e+1} \frac{x \cdot f(x)}{e^x} dx = e$.
   b) Calculați $\displaystyle\int_2^3 (x^3 - x) \cdot f(x^2) dx$.
   c) Demonstrați că $\displaystyle\int_n^{n+2} f(x) dx \geq 2e^2$, pentru orice orice număr natural n, $n \geq 2$.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 2

Florentina-Alina Ştefan [2]

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{64} + \log_2 8$ este natural.
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+2)x + m$ să fie în al treilea cadran.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 + 3x + 10} = 2$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{100}\}$, acesta să fie multiplu de 4.
5. Fie punctele $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(2,5)$. Să se determine lungimea medianei AM a triunghiului ABC.
6. Să se afle aria triunghiului ABC, ştiind că $AB = 5$, $AC = 6$ şi $\cos A = \dfrac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se arate că $A(a) + A(-a) = O_3$.
   b) Să se verifice dacă $A(2)$ este inversabilă, iar în caz afirmativ să se determine inversa sa.
   c) Să se găsească o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$ şi $B \neq I_3$ astfel încât $AB = BA$.
2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie " $*$ ", $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.
   a) Să se arate că $x * y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
   b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * x = C_6^3$.
   c) Să se calculeze $C_4^0 * C_4^1 * C_4^2 * C_4^3 * C_4^4$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
   a) Să se rezolve ecuaţia $f'(x) = 0$.
   b) Să se studieze convexitatea funcţiei.
   c) Să se arate că $f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{10}) \leq 4$.
2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$.
   a) Să se arate că $\int_0^1 (x^2+1) f(x)dx = \dfrac{e^2 - 1}{2}$.
   b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $\mathbb{R}$.
   c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)dx \leq e^2$.

[2]Lect.univ.dr., Universitatea din Piteşti, florentina.stefan@upit.ro

Testul 3

Monica Dumitrache[3]

SUBIECTUL I

1. Arătați că numărul $N = (1+i)^2 + (1-i)^2$ este număr natural.
2. Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 + 2x - 1 = 0$, determinați
$$x_1 + x_2 - 5x_1x_2.$$
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(3x^2 + x) - \log_5 4 = 0$.
4. Determinați câte numere naturale pare de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + (a+2)\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = (a-1)\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ sunt ortogonali.
6. Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos^4 x - \sin^4 x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.
   a) Arătați că $\det(M(2)) = -7$.
   b) Demonstrați că matricea $M(x)$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   c) Determinați numerele reale x pentru care $M(x) \cdot M(1) - M(0) = \begin{pmatrix} 100 & 101 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$$x \otimes y = xy - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 3 + \sqrt{3}.$$
   a) Arătați că $1 \otimes \sqrt{3} = \sqrt{3}$.
   b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \otimes x < x$.
   c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x \otimes 9^x = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.
   a) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
   b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 3$, situat pe graficul funcției f.
   c) Determinați imaginea funcției f.
2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{x}$.
   a) Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{x}\right) dx = \frac{3}{2}$.
   b) Demonstrați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3\ln x + 2022$ este o primitivă a funcției f.
   c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este mai mare decât 7π.

[3]Profesor, Colegiul Economic „Ion Ghica”, Târgoviște, dumitrache_m0nica@yahoo.com

Testul 4

Marius Macarie [4]

SUBIECTUL I

1. Determinați suma primilor 2022 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = -1000$ și $a_6 = -800$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $f(x) \geq -4$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{32} = 4^{\sqrt{x-3}}$.
4. Determinați numărul de submulțimi ordonate cu cel puțin 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(a, -a + 1)$ și $C(-3, 0)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.
6. Determinați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB = 4$, $BC = 3$ și $m(\sphericalangle B) = 120°$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$ unde x este un număr real.
   a) Arătați că $\det(A^3(1)) = 1$.
   b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, pentru orice numere reale x, y.
   c) Determinați $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(1) \cdot X = A(2)$.
2. Pe mulțimea $G = (3, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2y^2 - 9x^2 - 9y^2 + 90}$.
   a) Arătați că $x * y = \sqrt{(x^2 - 9)(y^2 - 9) + 9}$, pentru orice $x, y \in G$.
   b) Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
   c) Demonstrați că $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$, unde $f : (0, \infty) \to (3, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x + 9}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \ln(3x + 2) - \ln(3x - 2)$.
   a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.
   b) Arătați că funcția f este convexă.
   c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f : (-4, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx = \frac{33 - e^2}{2}$.
   b) Arătați că orice primitivă a lui f are un punct de inflexiune.
   c) Calculați $\displaystyle\int_{-2}^{2} |xf(x)| dx$.

[4]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 5

Maria-Crina Diaconu [5]

SUBIECTUL I

1. Determinați numărul real m, $m > 1$, pentru care numerele $m-1, 4$ și $m+8$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
2. Se consideră funcția $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 5$. Demonstrați că funcția f este pară.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația
$$\log_4(5 - x) = 2 - \log_4(25 - x).$$
4. Determinați numărul funcțiilor $f : \{3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 6\}$ strict crescătoare.
5. Se consideră A, B, C și D patru puncte coplanare, P mijlocul lui AB, Q mijlocul lui DC. Arătați că $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.
6. Calculați lungimea laturii AC a $\triangle ABC$ știind că $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$ și $\sphericalangle B = \dfrac{2\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(p) = \begin{pmatrix} p+3 & p+2 \\ p+1 & p \end{pmatrix}$, unde p este număr real.
   a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
   b) Arătați că matricea $A(p)$ este inversabilă pentru orice număr real p.
   c) Demonstrați că, dacă p și q sunt numere întregi pare și $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X \cdot A(p) = A(q)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + 4xy + y$.
   a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
   b) Demonstrați că $x * y = 4\left(x + \dfrac{1}{4}\right)\left(y + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
   c) Calculați partea întreagă a numărului
$$t = \left(-\frac{1}{2}\right) * \left(-\frac{1}{4}\right) * \ldots * \left(-\frac{1}{2022}\right).$$

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\ln x$.
   a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{-2(1-x)(1+x)}{x}$.
   b) Determinați ecuația tangentei la G_f în punctul de abscisă $x = 1$ situat pe graficul funcției f.
   c) Demonstrați că $x^2 \geq 1 + 2\ln x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+x}{3x^2+1}$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x) \cdot (3x^2 + 1)dx = \frac{15}{2}$.
   b) Arătați că $\displaystyle\int_0^3 \left(f(x) - \frac{1}{3x^2+1}\right) dx = \frac{\ln 28}{6}$.
   c) Determinați numărul real a pentru care $\displaystyle\int_0^3 x \cdot f(x)dx = 1 + \frac{1}{2a}\ln 28 - \frac{\sqrt{3}}{9}\text{arctg}\,(a\sqrt{3})$.

[5]Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

TESTUL 1

Elena Codeci[1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuaţia $2x^2 - 5x - 7 \leq 0$. **(5p)**

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + 2$, să fie intervalul $[1, \infty)$. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = \sqrt{2x + 5}$. **(5p)**

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 7. **(5p)**

5. Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului AB, unde $A(1, 2)$, $B(2, 4)$. **(5p)**

6. În triunghiul ΔABC avem $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{3}$. Să se calculeze $\sin A$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det M(1)$. **(5p)**

b) Să se arate că $M(x) \cdot M(y) = M\left((x + 1)(y + 1) - 1\right)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. **(5p)**

c) Să se determine perechile de numere întregi m, n, astfel încât $M(m) \cdot M(n) = M(10)$. **(5p)**

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$, se definește legea de compoziţie $x \circ y = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

a) Să se calculeze $0 \circ 27$. **(5p)**

b) Să se studieze existenţa elementului neutru. **(5p)**

c) Să se demonstreze că există o infinitate de perechi (m, n), m, $n \in \mathbb{N}$, pentru care $m \circ n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x + 1}$.

a) Să se arate că tangenta la graficul lui f în punctul $x_0 = 0$ este paralelă cu dreapta de ecuaţie $2y - x + 5 = 0$. **(5p)**

b) Să se determine intervalele de monotonie ale lui f. **(5p)**

b) Să se demonstreze că $\ln x > \sqrt{\ln x + 1} + 1 - \sqrt{2}$, $\forall\, x \in (e, \infty)$. **(5p)**

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit de

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 4x + 6},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

[1]Profesor, Colegiul Naţional „Vlaicu Vodă”, Curtea de Argeș, codeci_lili@yahoo.com

a) Să se calculeze I_1. **(5p)**

b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. **(5p)**

TESTUL 2

Mădălin Avram[2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{a-i}{2i-1} + \dfrac{1-ai}{1+2i}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $|z| = \mathrm{Re}(z)$. **(5p)**

2. Să se arate că pentru orice numere reale a, b, c, graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b) - c^2$, are cel puţin un punct comun cu axa Ox. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x^{\lg x} = 1000x^2$. **(5p)**

4. O grupă de studenţi trebuie să programeze 4 examene în 8 zile. În câte moduri se poate face aceasta, dacă primul examen trebuie să fie dat în ziua a doua? **(5p)**

5. În reprerul cartezian xOy, se consideră punctele $A(5,0)$ și $B(0,12)$. Să se afle distanţa de la centrul de greutate la centrul cercului circumscris triunghiului AOB. **(5p)**

6. Dacă $\sin x + \cos x = a$, să se afle valoarea expresiei $\sin^3 x + \cos^3 x$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=14 \\ 2x+ay-z=-8 \\ ax+3y+az=b+4 \end{cases}$, a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Să se afle numărul real a, pentru care sistemul are soluţie unică. **(5p)**

b) Pentru $b=2$, să se afle numărul real $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, știind că soluţia sistemului are forma (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0, z_0 în progresie aritmetică. **(5p)**

c) Dacă $a=3$, să se determine numărul real b pentru care sistemul este compatibil. **(5p)**

2. Pe $G=(0,1)$, se definește legea de compoziţie $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

a) Să se arate că $x \circ y = \dfrac{xy}{\frac{1}{2}(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}}$. **(5p)**

b) Să se studieze existenţa elementului neutru. **(5p)**

c) În ipoteza că legea este asociativă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ x \circ x = 1$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

a) Să se determine asimptota oblică a graficului funcţiei f spre $+\infty$. **(5p)**

[2]Profesor, Liceul Tehnologic Auto, Curtea de Argeș, avrammadalin@yahoo.com

b) Să se arate că f este surjectivă, dar nu este injectivă. **(5p)**

c) Să se arate că porţiunea din grafic cuprinsă între punctele $A(a, f(a))$ și $B(-2, f(-2))$ se află sub segmentul AB, oricare ar fi $a < -2$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

a) Să se arate că $\displaystyle\int_2^3 \left[\frac{1 + x^2 \ln x}{\ln x} - f(x)\right] dx = \frac{19}{3}$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_e^{e^2} e^{-\frac{1}{f(x)}} \cdot f^2(x)dx$. **(5p)**

c) Să se calculeze $l = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{e-x}^{e+x} f(t)dt$. **(5p)**

TESTUL 3

Emilia Jinga [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se arate că $2\log_9 3 + \log_2 4 - \sqrt[3]{27} = 0$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m^2$, unde $m \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul natural n pentru care parabola (grafic al funcţiei) este tangentă axei Ox. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$. **(5p)**

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând simultan două numere din mulţimea $\{0, 1, \ldots, 10\}$, cel puţin unul dintre numere să nu fie număr prim. **(5p)**

5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(1, 3)$ și $B(7, 12)$. Să se determine coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. **(5p)**

6. În triunghiul ABC cu $B = \dfrac{\pi}{6}$ și $A = \dfrac{7\pi}{12}$, să se arate că $\dfrac{AB}{AC} = \sqrt{2}$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricele $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $A^2 = 10A$. **(5p)**

b) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 10ab)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. **(5p)**

c) Să se determine numerele naturale a și b, pentru care $\det(X(a) \cdot X(b)) = 11$. **(5p)**

2. Pe $M = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, se definește legea $x \circ y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$.

a) Să se arate că $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \circ \dfrac{\pi}{3} = 0$. **(5p)**

b) Să se arate că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$". **(5p)**

[3]Profesor, Colegiul Naţional Vlaicu-Vodă, Curtea de Argeș, emilia.jinga@cn-vlaicuvoda.info

c) Să se determine $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, pentru care $x \circ x = 2x$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x - 2022}{\sqrt{x}}$.

a) Să se arate că $f'(x) = \dfrac{x + 2022}{2x\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$. **(5p)**

b) Să se arate că reprezentarea grafică a funcţiei nu are asimptotă la $+\infty$. **(5p)**

c) Să se demonstreze că f este bijectivă. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

a) Să se arate că $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \frac{e^2 + 1}{2}$. **(5p)**

b) Să se arate că $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{f(x)} dx = \ln \sqrt{5}$. **(5p)**

c) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$. **(5p)**

TESTUL 4

Marinela Ogiolan[4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{2} + \sqrt{11})^2$. **(5p)**

2. Să se determine funcţiile de gradul I $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strict crescătoare, care îndeplinesc condiţia $f(f(x)) = 9x + 4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left(\sqrt{3}\right)^{3+x-2x^2} = \sqrt[3]{27}$. **(5p)**

4. Se consideră $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din produsul cartezian $A \times A$, produsul numerelor a și b să fie par. **(5p)**

5. În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(3, -1)$ și $B(5, 7)$. Să se calculeze distanţa de la O la mijlocul lui $[AB]$. **(5p)**

6. Fie triunghiul ABC cu $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = 1$ și $BC = 6$. Să se calculeze aria sa. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $f(0) + f(1)$. **(5p)**

[4]Profesor, Liceul Tehnologic Auto, Curtea de Argeș, mogiolan@yahoo.com

b) Să se arate că $f(1)\cdot f(-1)=I_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **(5p)**

c) Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall\, x,\, y\in\mathbb{R}$. **(5p)**

2. Pe mulţimea $M=[0,\infty)$, se definește legea de compoziţie

$$x\circ y=\ln(e^x+e^y-1).$$

a) Să se calculeze $1\circ 0$. **(5p)**

b) Să se arate că legea este asociativă. **(5p)**

c) Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se determine $x\in M$ astfel încât $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n \text{ ori}}=2x$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $\forall\, x\in(0,\infty)$. **(5p)**

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f. **(5p)**

c) Să se demonstreze că $2^{\sqrt{5}}\leq 5^{\sqrt{2}}$. **(5p)**

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3-x^2}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x f(t)dt}{x^2}$. **(5p)**

TESTUL 5

Antonio Nuică[5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se arate că $\sqrt{144}-\log_3 27+\sin\dfrac{5\pi}{6}\notin\mathbb{N}$. **(5p)**

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2-mx+1>0$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuaţia $\ln(x^2-5x+e+6)=1$. **(5p)**

4. Să se determine câte numere de 3 cifre au cifrele pare și distincte. **(5p)**

5. Dacă $A(1,2)$ și $B(2,1)$, să se determine coordonatele punctelui C, astfel încât $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$, unde $O(0,0)$. **(5p)**

[5]Lect.univ.dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com

6. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ΔABC, știind că $AB = 9$, $AC = 12$, $BC = 15$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$ și A matricea asociată sistemului.

a) Să se determine m astfel încât sistemul este compatibil determinat. **(5p)**

b) Pentru $m = -2$, să se rezolve sistemul. **(5p)**

c) Pentru $m = 0$, să se rezolve sistemul. **(5p)**

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziţie $x \circ y = xy + 3x + 3y + 7$.

a) Să se calculeze $\dfrac{(1 \circ 2) \circ 3}{1 \circ (2 \circ 3)}$. **(5p)**

b) Să se arate că legea "$\circ$" nu este asociativă. **(5p)**

c) Să se arate că legea "$\circ$" nu are element neutru. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f. **(5p)**

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f. **(5p)**

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuaţia $f(x) = m$ are exact două soluţii reale distincte. **(5p)**

2. Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^2 (x^4 + 1) f(x) dx$. **(5p)**

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx$. **(5p)**

c) Să se arate că orice primitivă a lui f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$. **(5p)**

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Antonio Nuică[1]

SUBIECTUL I

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. Să se determine:

a) asimptotele la graficul funcţiei;
b) intervalele de monotonie ale funcţiei;
c) punctele de extrem ale funcţiei.

SUBIECTUL al II-lea

Fie $f = X^4 + aX^3 + a^2X^2 + a^3X \ \in \mathbb{C}[X]$. Să se descompună f în factori ireductibili:

a) în $\mathbb{R}[X]$ pentru $a = -1$;
b) în $\mathbb{C}[X]$ pentru $a = 1$;
c) în $\mathbb{C}[X]$ pentru $a = i$.

SUBIECTUL al III-lea

Fie punctele $A(1, 1),\ B(1, -1),\ C(0, -1)$. Să se scrie:

a) ecuaţia înălţimii din B în triunghiul ABC;
b) ecuaţia mediatoarei segmentului $[BC]$;
c) ecuaţia bisectoarei unghiului $\widehat{CAB}$.

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu[2]

SUBIECTUL I

Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx + y - z &= 1 \\ 4x + 2my + 3z &= 10 \\ 3mx + y + 2mz &= 21 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că sistemul are soluţie unică pentru orice $m \in \mathbb{N}$.
b) Să se rezolve sistemul pentru $m = -1$.
c) Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât soluţia (x_0, y_0, z_0) a sistemului să verifice relaţia $2x_0 + y_0 - z_0 = 0$.
d) Dacă $A(m) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ reprezintă matricea ataşată sistemului, să se determine inversa matricei $A(1)$.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln x + ax - 3, & x > 1 \\ x + b, & x \leq 1 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile parametrilor a şi b astfel încât funcţia f să fie derivabilă.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, antonio_74nm@yahoo.com
[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, gemiral@yahoo.com

b) Pentru $a = 0$ şi $b = -4$, să se determine asimptotele funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$.

c) Să se calculeze $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

d) Pentru fiecare număr natural nenul n, ştiind că $a = 0$ şi $b = -4$, se consideră numărul $I_n = \int\limits_0^1 e^x \left(f(x)+4\right)^n \mathrm{d}x$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-2,3)$ şi $B(4,1)$.

a) Să se construiască dreptunghiul $ACBD$, cu diagonala AB şi să se determine coordonatele punctelor C şi D, ştiind că punctul C se află în acelaşi cadran cu B.

b) Se construiesc în afara dreptunghiului $ACBD$ triunghiurile isoscele MAD, cu baza AD, respectiv NBC, cu baza BC. Ştiind că ambele triunghiuri au ariile egale cu 4, să se determine coordonatele punctelor M şi N.

c) Să se determine perimetrul poligonului $ACNBDM$.

d) Să se determine ecuaţia înălţimii din A a triunghiului AMB.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră și Elemente de analiză matematică

1. Să se demosntreze că, pentru $1 \le x \le 2$,

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

2. Să se determine α şi β astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x - 3y &= -2 \\ x + 2y &= 3 \\ 3x - y &= \alpha \\ 2x + y &= \beta \end{cases} \quad \text{să fie compatibil.}$$

3. Calculaţi

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{n}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}$;

iii) $\int x \sin x \; dx$;

iv) $\int \dfrac{x}{x^4+1} \; dx$.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă} \quad x \le 2 \\ ax + b & \text{dacă} \quad x > 2 \end{cases}$.

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

i) Determinaţi a şi b astfel încât f să fie continuă şi derivabilă.

ii) Pentru $a = 4,\ b = 0$, calculaţi $\int_1^3 f(x)dx$.

5. i) Arătaţi că, pentru $n,\ k$ numere naturale cu $n \geq k$, există relaţia

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k.$$

ii) Calculaţi suma: $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots \frac{1}{n+1}C_n^n$.

Geometrie plană şi în spaţiu, Geometrie analitică şi Trigonometrie

1. Fie x, y, z trei numere pozitive direct proporţionale cu numerele $m-1, m, m+1$, unde $m \geq 2$.

a) Demonstraţi că $x\ , y,\ z$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi ABC;

b) Determinaţi pe m astfel încât triunghiul să fie dreptunghic;

c) Poate fi triunghiul isoscel? Dar echilateral?

2. Prelungim diagonala DB a pătratului $ABCD$ cu $BN = AB$. Fie $M \in DC$ (C între D şi M) astfel încât $m(\widehat{MAD}) = 3m(\widehat{AMD})$ şi $\{P\} = AM \bigcap DN$.

a) Calculaţi $m(\widehat{MAD})$, $m(\widehat{AMD})$ şi $m(\widehat{ABN})$;

b) Arătaţi că MA este bisectoarea $\widehat{CAB}$;

c) Arătaţi că patrulaterul $ANMD$ este inscriptibil.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\cos^2 x - (2a+1)\cos x + a = 0,\ a \in \mathbb{R}$;

b) $\cos x - \sin x = \cos 2x$.

4. Fie prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia bazei x şi muchia laterală y.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul prismei în funcţie de x şi y;

b) Să se calculeze lungimea segmentului $A'C$ şi lungimea segmentului $A'O$, unde O este mijlocul segmentului BD.

5. Se dau punctele $A(-1,1),\ B(3,3),\ C(2,-1)$.

a) Să se scrie ecuţiile dreptelor $AB,\ AC$ şi BC;

b) Să se scrie ecuaţia înălţimii şi ecuaţia medianei din punctul A;

c) Să se găsească coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC şi perimetrul triunghiului ABC.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 2001)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

TESTUL 1

Vasile Marius Macarie[1]

1. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $\frac{x}{x+4} \leq \frac{x+3}{x+1}$ este: a) $(-\infty,-4)\bigcup[-2,-1)$; b) $(-\infty,-1)$; c) $(-4,-2]\bigcup(-1,+\infty)$; d) $(-4,-2)$; e) $(-\infty,-2]\bigcup(-1,+\infty)$.

2. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţei $x^2+x-5=0$. Rezultatul calculului $\frac{x_1}{x_2^2+x_2-6}+\frac{x_2}{x_1^2+x_1-6}$ este: a) 1; b) 0; c) 12; d) -6; e) 5.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$. Graficul funcţiei f admite ca asimptotă oblică spre $-\infty$ dreapta de ecuaţie:
a) $y=x$; b) $y=x+1$; c) $y=-x-1$; d) $y=-x+1$; e) $y=x-1$.

4. Suma pătratelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=3$ este:
a) 4; b) 0; c) $\frac{9}{5}$; d) $\frac{25}{9}$; e) 9.

5. Valoarea lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţiile $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt[3]{3}} x=6$ şi $2^{-3x+m}=\frac{1}{1024}$ sunt echivalente este: a) 3; b) -1; c) 0; d) 19; e) 1.

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\ln(x^2+1)}$. Atunci valoarea derivatei $f'(1)$ este:
a) 1; b) 0; c) $\ln 2+1$; d) $\ln 3$; e) $\ln 2$.

7. Modulul numărului complex $z=\left(\frac{2+3i}{3-2i}\right)^{2022}$ este:
a) 2^{2022}; b) 1; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$; d) 0; e) 3^{2022}.

8. Valorile parametrilor $m,n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx+2y-z=3 \\ x+4y-3z=2 \\ 2x-2y+z=n \end{cases}$ este incompatibil sunt:
a) $m=-2; n=-3$; b) $m=-2; n\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$; c) $m=-2; n\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$;
d) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}; n=-3$; e) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}; n\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

9. Se consideră funcţia bijectivă $f:(4,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+\ln(x-4)$ şi $a=(f^{-1})'(32)$, unde f^{-1} este inversa lui f. Atunci valoarea lui a este:
a) $a=\frac{1}{5}$; b) $a=\frac{1}{\ln(2^{32}\cdot e)}$; c) $a=\frac{1}{32\ln 2}$; d) $a=32\ln 2+1$; e) $a=0$.

[1]Lect.univ.dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

10. Suma coeficienţilor polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(x) = (2x-1)^{2022} + (x-2)^{2023}$, este:
a) 2; b) 0; c) 2023; d) 2^{2022}; e) 1.

TESTUL 2

Raluca Mihaela Georgescu[2]

1. Suma cuburilor soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 4x + 13 = 0$ este:
a) 29; b) 92; c) 39; d) -92; e) -94.

2. Soluţia inecuaţiei $\log_2(x^2-4) \leq e^{\ln 5}$ este: a) $(-6,-4) \cup (4,6)$; b) $(-6,-4] \cup (2,6)$; c) $[-6,-4) \cup (4,6]$; d) $[-6,-2) \cup (2,6]$; e) $(-6,-2) \cup (2,6)$.

3. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\ln(3x-2)}$ este: a) $\dfrac{5}{3}$; b) $-\dfrac{3}{2}$; c) 2; d) $\dfrac{4}{3}$; e) 1.

4. Rădăcinile reale ale ecuaţiei $\log_{x+1}(x^4+x^3+3x-1) = 2$ sunt:
a) $\{-i, 1, i\}$; b) $\{-2\}$; c) $\{-i, 1, -2, i\}$; d) $\{1, -2\}$; e) $\{1\}$.

5. Coordonatele punctelor de intersecţie ale asimptotelor funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{2,3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-5x+6}$ sunt
a) $A(2,7), B(3,8)$; b) $A(2,7)$; c) $B(3,8)$; d) $A(7,2), B(8,3)$; e) $A(2,5), B(-3,2)$.

6. Dacă într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu raţia 5 avem $a_3 = 11$ şi $S_n = 235$, atunci n este:
a) 11; b) 9; c) 10; d) 8; e) 12.

7. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{2x^2+8} + x = 6$ sunt:
a) $\{-3\}$; b) $\{2\}$; c) $\{-14\}$; d) $\{-14, 2\}$; e) $\{-1, 2\}$.

8. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$. Atunci $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{f(x)+x-3}$, unde a este punctul de inflexiune, este:
a) $\dfrac{18}{17}$; b) $\dfrac{16}{17}$; c) $\dfrac{17}{16}$; d) $\dfrac{17}{18}$; e) $\dfrac{16}{15}$.

9. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{27} & \log_{0,1} 10 \\ 0 & \sqrt[4]{16} \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 + 5X - 10I_2$. Atunci $\det(f(A))$ este: a) 48; b) 56; c) 64; d) 46; e) 76.

10. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 \frac{3x-6}{\sqrt{(x+1)(x-2)^2}}dx$ este:
a) $12 - 18\sqrt{3}$; b) $12 + 18\sqrt{3}$; c) $18 - 12\sqrt{3}$; d) $18 + 12\sqrt{3}$; e) 18.

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

TESTUL 3

Maria-Crina Diaconu [3]

1. Suma rădăcinilor ecuaţiei $\left(\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3+\sqrt{2}}\right)^x = 6$ este:
   a) 3; b) 7; c) 0; d) 4; ; e) 6.

2. În dezvoltarea $(x+1)^n$ coeficienţii lui x^4 şi x^{11} sunt egali dacă valoarea lui n este:
   a) 14; b) 13; c) 11; d) 12; e) 15.

3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care avem egalitatea $A^n + A^{n+1} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 24 \end{pmatrix}$ este: a) 4; b) 3; c) 5; d) 2; e) 1.

4. Dacă $\cos(\lambda) = \frac{1}{7}$ şi $\lambda \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, atunci $\sin(\lambda)$ are valoarea:
   a) $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$; b) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) 1.

5. Fie punctele $A(0,2), B(3,1), C(1,5)$. Distanţa de la punctul C la dreapta AB este:
   a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; b) $10\sqrt{10}$; c) $\sqrt{10}$; d) $2\sqrt{5}$; e) $5\sqrt{2}$.

6. Parametrul $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (m+1)\vec{i} - m\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} - m\vec{j}$ sunt perpendiculari are valoarea: a) 3; b) 1; c) 0; d) -2; e) 4.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3 + \ln(1-x), & x < 0 \\ a - 1, & x = 0 \\ 2 + e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.
   Valoarea numărul real a pentru care funcţia f este continuă în punctul $x = 0$ este:
   a) $a = 0$; b) $a = 1$; c) $a = 4$; d) $a = 2$; e) $a = 3$.

8. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + e^{5x}$. Dacă $Q_n = f^{(n)}(0)$ (derivata de ordin n a funcţiei f în punctul $x = 0$) atunci Q_{2022} este:
   a) $Q_{2022} = 5^{2022}$; b) $Q_{2022} = 0$; c) $Q_{2022} = 2022\dot{5}^{2022}$; d) $Q_{2022} = 5^{2021}$; e) $Q_{2022} = 1$.

9. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} \sqrt{1+t^2}dt$: a) 3; b) 0; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) 4.

10. Se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+3x+5}dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.
    Să se calculeze $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 5I_n$.
    a) $\frac{1}{n+2}$; b) $\frac{1}{n+1}$; c) $\frac{1}{3n+5}$; d) $\frac{n}{n+1}$; e) $\frac{n}{3n+5}$.

[3]Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

TESTUL 4

D.M.I. [4]

1. Asimptotele oblice ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+1}}$, se intersectează în punctul de coordonate:
   a) $(3,3)$; b) $(0,3)$; c) $(-3,0)$; d) $(3,0)$; e) $(-3,3)$.

2. Soluţia inecuaţiei $\log_2(\log_3(8-\log_4 x))\le 1$ este:
   a) $x\in\left[\frac{1}{2},2\right)$; b) $x\in\left[\frac{1}{2},16\right)$; c) $x\in[1,2^5)$; d) $x\in\left[\frac{1}{4},8\right)$; e) $x\in\left[\frac{1}{4},4^8\right)$.

3. Termenul al cincilea al dezvoltării binomului $(2+x)^x$ este cel mai mare pentru:
   a) $x=13$; b) $x=5$; c) $x=3$; d) $x=19$; e) $x=8$.

4. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2-n+1}\right)$ este: a) $\dfrac{1}{2}$; b) nu există; c) 0; d) 1; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Calculând suma $S=C_n^1+2\cdot C_n^2+3\cdot C_n^3+...+n\cdot C_n^n$ obţinem:
   a) $S=n\cdot 2^n$; b) $S=2^{n+2}$; c) $S=n\cdot 2^{n-1}$; d) $S=n\cdot 2^{n+1}$; e) $S=(n+1)\cdot 2^n$.

6. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3-\sqrt{5x^2-x-3}}{x^2-4x+3}$ este: a) ∞; b) $\dfrac{1}{2}$; c) 0; d) $\dfrac{1}{4}$; e) 1.

7. Sistemul $\begin{cases} x+y+z &= 2\\ 2x-y-2z &= -2\\ x+4y+\lambda z &= 8\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, este compatibil simplu nedeterminat dacă λ are valoarea: a) 5; b) -5; c) 3; d) 1; e) 0.

8. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie $\star$ prin: $z_1\star z_2=z_1+z_2-z_1\cdot z_2$. Elementul simetric al lui i faţă de această lege este:
   a) $\dfrac{2-i}{2}$; b) $\dfrac{1-i}{2}$; c) $1-i$; d) $\dfrac{1+i}{2}$; e) $1+i$.

9. Valoarea integralei $\int\limits_1^{n+1}\ln[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x, este:
   a) $\ln(n-1)!$; b) $n!$; c) $\ln n!$; d) $\dfrac{1}{2}\ln n$; e) $\dfrac{3}{2}\ln(n+1)$.

10. Dacă ω este rădăcină a ecuaţiei $x^2+x+1=0$, atunci
$$\sum_{k=1}^{3n+1}\begin{pmatrix}\omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k}\\ \omega^{3k} & \omega^k & \omega^{2k}\end{pmatrix}=$$
   a) $\begin{pmatrix}\omega^2 & 0 & 3n+1\\ 3n+1 & \omega^2 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}\omega^2 & \omega & 3n+1\\ 3n+1 & \omega^2 & \omega\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}\omega & \omega^2 & 3n\\ 3n & \omega & \omega^2\end{pmatrix}$;
   d) $\begin{pmatrix}\omega^2 & \omega & 3n\\ 3n & \omega^2 & \omega\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}\omega & \omega^2 & 3n+1\\ 3n+1 & \omega & \omega^2\end{pmatrix}$.

[4] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Ioan Vlad Laudat [1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare științe ale naturii

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Indicați o expresie care are valoarea 1 dacă valoarea variabilei x aparține intervalului $[0, 7)$. **(4p.)**
   a) `(x>=0) && (x<7)`
   b) `(x>7) || (x<=0)`
   c) `(x>0) && (x<=7)`
   d) `(x<7) && (x<0)`

2. Subprogramul f este definit alăturat. Indicați ce se afișează la apelul f(12377). **(4p.)**

```
void f(int n)
{
int c;
while(n>0)
 {
    c=n%10;
    n=n/10;
    if (c==7)
    cout<<n%10<<'*';
    cout<<'*';
 }
}
```

   a) `3**2*****`
   b) `7*3****`
   c) `7**3*****`
   d) `7*7***`

3. Este organizat un concurs de steaguri în orașul Alinei. Alina dorește să creeze un steag cu 3 culori, dar nu se poate decide între cele 6 pe care le are la dispoziție, anume roșu, galben, albastru, violet, oranj, verde în această ordine. Fiind o informaticiană desăvârșită a pus aceste culori într-un program C/C++ bazat pe metoda backtracking care generează doar soluții unice, alegând astfel cea de-a 5-a soluție generată de program. Ce soluție a ales Alina? **(4p.)**

[1]Student, Universitatea din Pitești, vladlaudat@yahoo.com

a) rosu, albastru, violet
b) galben, verde, violet
c) rosu, albastru, galben
d) violet, oranj, verde

4. Se consideră vectorul de tați al următorului arbore cu 9 noduri, numerotate de la 1 la 9: T:(7, 0, 6, 7, 6, 2, 2, 9, 1). Enumerați frunzele arborelui. **(4p.)**

a) `5, 3, 6, 4`
b) `2, 7, 8, 9`
c) `4, 3, 8, 5`
d) `2, 5, 7, 4`

5. Matricea de adiacență a unui graf neorientat cu 2022 de noduri are 300 elemente nenule. Indicați numărul minim de componente conexe ale grafului. **(4p.)**

a) `1722` b) `1872` c) `2005` d) `1840`

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b.

a) Scrieți valoarea afișată dacă se citește numărul 10. **(6p.)**
b) Scrieți cel mai mic număr care poate fi citit pentru ca x să aibă 3 cifre. **(6p.)**
c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(6p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structura pentru...execută cu o structură repetitivă cu test inițial. **(10p.)**

```
citeste n
x<-0
pentru i<-1,n executa
|        x<-x+i%10
|        daca i%2=0 atunci
|        |        x<-x-i
|        |_
|_
scrie x
```

2. Variabila c memorează date despre o mașină: culoare și data achiziției. Știind că expresiile C/C++ de mai jos au ca valori numere naturale reprezentând culoarea, respectiv data (ziua, luna și anul) achiziției produsului, scrieți definiția unei structuri cu eticheta `masina`, care permite memorarea datelor precizate pentru o mașină și declarați corespunzător variabila c.

c.culoare c.data.zi c.data.luna c.data.an **(6p.)**

3. În secvenţa de mai jos, variabila i este de tip întreg, iar variabilele s și t pot memora câte un şir cu cel mult 20 de caractere. Scrieţi ce se afișează pe ecran în urma executării secvenţei. **(6p.)**

```
strcpy(s,"BacaLAurEat");
cout<<strlen(s);
i=0;
while(i<strlen(s))
        if(s[i]=='B')
        { strcpy(t, s+i+1); strcpy(s+i, t);}
        else i++;
cout<<s;
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Subprogramul f are doi parametri:

   - n, prin care primește un număr natural ($n \in [2, 10^5]$);
   - m, prin care furnizează cel mai mare număr din intervalul închis $[2, n]$ care are numărul factorilor primi divizibil cu 3. În cazul în care nu există, m primește valoarea -1.

   Scrieți definiția completă a subprogramului.

   Exemplu: dacă $n = 32$ atunci, în urma apelului, $m = 30$. **(10p.)**
2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură numărul natural n ($n \in [5, 50]$) și elementele unui tablou bidimensional cu n linii și n coloane, numere naturale din intervalul $[0, 10^2]$. Programul afișează pe ecran cele mai mari valori din cele 4 zone (nord-sud-est-vest) delimitate de diagonala principală și cea secundară, neincluzând diagonalele.

   Exemplu: pentru n=7 și tabloul alăturat, se afișează pe ecran 9, 9, 8, 8.

   1 2 3 4 5 5 6

   7 8 9 0 3 1 2

   4 6 8 0 1 1 3

   8 6 3 6 2 4 7

   5 7 9 2 2 5 8

   1 4 7 0 5 3 6

   9 2 5 8 5 9 1 **(10p.)**
3. Fișierul `bac.txt` conține un șir de cel mult 10^6 numere naturale din intervalul $[0, 10^9]$. Se cere să se determine și să se afișeze pe ecran, separate printr-un spațiu, numerele cuprinse in intervalul $[0, 99]$ care **nu** apar în compoziția numerelor din fișier. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.

   Exemplu: Dacă fișierul conține numerele 222 345 821 se vor afișa numerele întregi din intervalul $[0, 99]$, $\{22, 34, 45, 82, 21\}$

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Anca-Elena Ilie[1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii C/C++ are valoarea 1 dacă și numai dacă numărul real memorat în variabila x aparține intervalului $[-2022; 2022)$? **(4p.)**
   a) `(x+2022<0 && x-2022>=0)`
   b) `!(x+2022<0 || x-2022>=0)`
   c) `(x+2022>=0 && x-2022<=0)`
   d) `!(x+2022>=0 || x-2022<0)`

2. Utilizând metoda backtracking se generează toate posibilitățile de a forma selecții de câte trei arome de înghețată din mulțimea {,,Vanilie", ,,Cacao", ,,Caramel", ,,Kiwi", ,,Ananas"} pentru o petrecere aniversară. Două selecții sunt distincte daca diferă prin cel puțin o aromă. Primele trei selecții generate sunt în această ordine: {,,Vanilie", ,,Cacao", ,,Caramel"}, {,,Vanilie", ,,Cacao", ,,Kiwi"}, {,,Vanilie", ,,Cacao", ,,Ananas"}. A cincea selecție este: **(4p.)**
   a) {,,Caramel", ,,Kiwi", ,,Ananas"}
   b) {,,Cacao", ,,Caramel", ,,Kiwi"}
   c) {,,Vanilie", ,,Caramel", ,,Ananas"}
   d) {,,Vanilie", ,,Caramel", ,,Kiwi"}

3. Subprogramul `f` este definit alăturat. Indicați ce se afișează în urma apelului `f(2);`. **(4p.)**

```
void f (int x)
{if(x<22) {cout<<x/2;
           f(2*x-1);
           cout<<x%2;}
}
```

   a) `1124810101`
   b) `1024810100`
   c) `1124810100`
   d) `1124811110`

4. Un arbore cu 12 noduri, numerotate de la 1 la 12, este reprezentat prin vectorul de ,,tați" $(5, 1, 1, 1, 0, 7, 5, 6, 6, 8, 6, 7)$. Indicați numărul de descendenți direcți (,,fii") ai nodului 6: **(4p.)**

[1]Student, Universitatea din Pitești, anca.ilie29@gmail.com

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1

5. Câte muchii are un graf complet cu 15 noduri? **(4p.)**

a) 105 b) 120 c) 100 d) 115

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b, cu `[c]` partea întreagă a numărului real c și cu `a↔b` operația de interschimbare a valorilor variabilelor a și b.

```
citeste a,b (numere naturale)
s←0
daca a>b atunci
|   a↔b
|_
cat timp a<b executa
|         s←s+b%a+[b/a]
|         a←a+1
|_
scrie s
```

   a) Scrieți ce afișează dacă se citesc, în această ordine, valoarele 17 și 12. **(6p.)**
   b) Scrieți două perechi de numere din intervalul [20, 100], care pot fi citite, astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afișeze valoarea 27. **(6p.)**
   c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieţi în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structura **cât timp.....execută** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

2. Variabila d memorează date despre o mașină: marca, data fabricării, prețul. Știind că expresiile C/C++ de mai jos au ca valori: un șir de caractere reprezentând marca mașinii, trei numere naturale, reprezentând data (ziua, luna, anul) fabricării, respectiv un număr real pozitiv reprezentând prețul, scrieți definiția unei structuri cu eticheta **mașină** care permite memorarea datelor precizate pentru un autovehicul și declarați corespunzător variabila m.

   m.marcă m.data.zi m.data.luna m.data.an m.preț **(6p.)**

3. Variabila s memorează un șir de cel mult 30 de caractere (litere mari și mici ale alfabetului englez). Declarați eventuale alte variabile necesare și scrieți o secvență de instrucțiuni în urma executării căreia să se modifice șirul astfel încât să fie eliminate vocalele majuscule.

   Exemplu: dacă se citește textul **UniversItatE** se afișează pe ecran **niverstat.** **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Subprogramul **perfect** primește ca parametri o cifră c, un număr natural $n \in [1, 15]$ și un tablou unidimensional v cu n elemente din intervalul $[-100, 100]$. Subprogramul returnează 1 dacă v este perfect, respectiv 0 în caz contrar. Tabloul unidimensional v este perfect dacă fiecare element al său conține cifra c o singură dată și se împarte exact la cifra c. Scrieți definiția completă a subprogramului. **(10p.)**
2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură două numere naturale $m, n \in [3, 10]$ și $m * n$ numere din intervalul $[0, 10^9]$, elemente ale unui tablou bidimensional cu m linii și n coloane numerotate de la 1. Să se construiască și să se afișeze matricea transpusă a matricei citite.

Exemplu: pentru tabloul $\begin{matrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{matrix}$, matricea transpusă este $\begin{matrix}1&5&9\\2&6&10\\3&7&11\\4&8&12\end{matrix}$. **(10p.)**

3. Șirul de mai jos este definit astfel: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_n = 3 \cdot f_{n-1} - f_{n-2}$ (unde n este un număr natural $n \geq 3$): $1, 2, 5, 13, 34, 89, \ldots$.

   Se citește de la tastatură un număr natural x ($x \leq 10^9$), valoare a unui termen al șirului dat și se cere să se scrie în fișierul text `bac.txt`, în ordine descrescătoare, separați prin câte un spațiu, toți termenii șirului care sunt numere impare mai mici sau egale cu x. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.

   Exemplu: dacă se citește numărul 13 fișierul `bac.txt` conține numerele 13 5 1

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Testul 2

Ştefăniţă Eugen Toroimac[2]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabilele x şi y sunt de tip real. Expresia C/C++ următoare este echivalentă cu expresia: `!(x>0 && y>0)` **(4p.)**
   a) `x<=0 || y<=0`
   b) `x<=0 && y<=0`
   c) `x>0 || y>0`
   d) `!(x>0) && !(y>0)`

2. Utilizând metoda backtracking se generează toate modalitățile de a prepara o băutură din câte 3 sau 4 tipuri de fructe distincte din mulțimea **{căpșune, mere, pepene, pere, portocale}**. Primele patru soluții generate sunt, în această ordine: (căpșune, mere, pepene), (căpșune, mere, pepene, pere), (căpșune, mere, pepene, portocale), (căpșune, mere, pere). Indicați cea de a șasea soluție generată. **(4p.)**

[2]Student, Universitatea din Pitești, tstefanita2002@gmail.com

a) (pepene, pere, portocale)
b) (căpşune, mere, portocale)
c) (mere, pepene, pere, portocale)
d) (căpşune, mere, pere, pepene)

3. Subprogramul `f` este definit alăturat. Valoarea lui `f(19,20)` este: **(4p.)**

```
int f(int x, int y)
{   if(x<=0) return y;
    if(y<=0) return x;
    return f(2*x-y, y+1);
}
```

a) 38
b) 24
c) -5
d) -7

4. Un arbore cu 9 noduri, numerotate de la 1 la 9, este reprezentat prin vectorul de "taţi" (8, 6, 4, 2, 3, 0, 4, 2, 7). Indicaţi un "frate al nodului" 3: **(4p.)**

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

5. Un graf orientat are 10 arce, 3 componente tare conexe, iar fiecare vârf al său are atât gradul interior, cât şi gradul exterior nenule. Numărul minim de noduri pe care le poate avea graful este: **(4p.)**

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Algoritmul de mai jos este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărţirii numărului natural a la numărul natural nenul b, şi cu `[a]` partea întreagă a numărului real a.

```
citeste n (numar natural nenul)
nr<-0
i<-1
cat timp i<=n executa
|citeste x (numar natural)
|cat timp x!=0 si n%2!=x%2 executa
|| x<-[x/10]
||_
||daca n=x atunci
||  nr<-nr+1
||_
|i<-i+1
|_
scrie nr
```

a) Scrieţi ce se afişează în urma executării algoritmului dacă se citesc, în această ordine, numerele 6, 61, 4273, 6179, 3165, 200, 167. **(6p.)**
b) Dacă primele două numere citite sunt, în această ordine, 2 şi 23, scrieţi o secvenţă de numere distincte din intervalul $[10^3, 10^4)$ care pot fi citite în continuare astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afişeze valoarea 2. **(6p.)**
c) Scrieţi programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieţi în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structura **cât timp** ... **executa** cu o structură repetitivă de alt tip. **(6p.)**

2. Variabila s poate memora un şir de cel mult 20 de caractere, variabila `aux` este de tip char, iar celelate variabile sunt de tip intreg. Scrieţi şirul memorat prin intermediul variabilei s în urma executării secvenţei următoare. **(6p.)**

```
strcpy(s, "ROMANIA");
i= strlen(s);
for(j=3;  j>=0; j--)
   {aux=s[i]; s[i]=s[i-j];
   s[i-j]=aux; i=i-j;
   }
```

3. Variabilele i şi j sunt de tip întreg, iar variabila a memorează un tablou bidimensional cu 5 linii şi 7 coloane, numerotate începând de la 0, cu elemente numere întregi, iniţial toate egale cu 1. Fără a utiliza alte variabile decât cele menţionate, scrieţi o secvenţă de instrucţiuni prin care se transformă în memorie tabloul, astfel încât orice element aflat pe prima linie sau pe prima coloană să aibă valoarea 1 şi oricare alt element din tablou să fie egal cu ultima cifră a sumei celor două elemente alăturate lui, în stânga, respectiv în sus. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Subprogramul **identice** are un singur parametru, n, un număr natural ($n \in [10, 10^3]$). Subprogramul returnează valoarea 1, dacă numărul n are cifrele egale, sau valoarea 0 în caz contrar. Scrieţi definiţia completă a subprogramului.

   Exemplu: Dacă $n = 2222$, subprogramul returnează valoarea 1, iar dacă $n = 212$, subprogramul returnează valoarea 0. **(10p.)**

2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură numere naturale: n ($n \in [2, 20]$), k ($k \in [1, n]$) și $n \cdot n$ numere din intervalul $[0, 10^9]$, elemente ale unui tablou bidimensional cu n linii și n coloane. Programul transformă tabloul în memorie, deplasând circular spre dreapta, cu câte o poziție, toate elementele situate pe linia a k-a, în stânga diagonalei secundare, ca în exemplu. Elementele tabloului obținut sunt afișate pe ecran, fiecare linie pe câte o linie a ecranului, cu elementele fiecărei linii separate prin câte un spațiu.

   Exemplu: pentru $n = 5$, $k = 2$ și

	2	3	4	5	6		2	3	4	5	6
	2	4	6	8	0		6	2	4	8	0
tabloul	7	8	9	0	1	se obţine tabloul	7	8	9	0	1 .
	3	5	7	9	1		3	5	7	9	1
	7	3	8	5	6		7	3	8	5	6

   (10p.)

3. Șirul de mai jos este definit astfel: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_n = 3 \cdot f_{n-1} - 2 \cdot f_{n-2}$ (unde n este un număr natural $n \geq 3$). $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$. Se citește de la tastatură un număr natural x ($x \leq 10^9$), valoare a unui termen al șirului dat, şi se cere să se scrie în fişierul text `bac.txt`, în ordine descrescătoare, separați prin câte un spațiu, toţi termenii şirului care sunt pătrate perfecte mai mici sau egale cu x. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate şi al timpului de executare.

   Exemplu: dacă se citește numărul 16 fişierul `bac.txt` conţine numerele 16 4 1

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 6

Clasa a IX-a

M 145. *Demonstrați că dacă*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N}^*,$$

atunci $6m-11n$ *se divide cu* 103.

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Avem

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}=\frac{m}{n}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}$$
$$=\frac{100\cdot 101\cdot 102\cdot m+(100\cdot 101+101\cdot 102+102\cdot 100)n}{100\cdot 101\cdot 102\cdot n}$$

și cum $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}=\left(1+\frac{1}{102}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{101}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}\right)$ iar 103 este număr prim, rezultă că numărul $A=100\cdot 101\cdot 102\cdot m+(100\cdot 101+101\cdot 102+102\cdot 100)n$ se divide cu 103. Dar $A=\{(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot m+[(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)]\,n\}\bmod 103=(-6m+11n)\bmod 103$, deci $6m-11n$ se divide cu 103.

M 146. *Arătați că pentru orice numere reale* a, b, c *și* d *avem*

$$\left(1+a^4\right)\left(1+b^4\right)\left(1+c^4\right)\left(1+d^4\right)\geq\max\left\{(ab+cd)^4,(ac+bd)^4,(ad+bc)^4\right\}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție (*Titu Zvonaru*, Comănești). Fie $E=(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)$.

Aplicând *Inegalitatea lui Hölder* avem

$$E=\left(a^4+1\right)\left(b^4+1\right)\left(1+c^4\right)\left(1+d^4\right)\geq\left(\sqrt[4]{a^4\cdot b^4\cdot 1\cdot 1}+\sqrt[4]{1\cdot 1\cdot c^4\cdot d^4}\right)^4$$
$$=(|ab|+|cd|)^4\geq|ab+cd|^4=(ab+cd)^4.$$

Analog, avem $E\geq(ac+bd)^4$ și $E\geq(ad+bc)^4$, prin urmare rezultă inegalitatea din enunț.

Notă. Domnul *Daniel Văcaru* din Pitești a propus o altă rezolvare, folosind *Inegalitatea lui Huygens*.

M 147. *Determinați valorile reale pozitive ale lui p pentru care inegalitatea*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3$$

are loc pentru orice $a,b,c\geq 0$ astfel încât $a\leq b\leq c$, $a+b+c=ab+bc+ca>0$ și $bc=p^2$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Fie $a+b+c=ab+bc+ac=k$. Din $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ac)$ rezultă $k^2\geq 3k$, iar din $k>0$ rezultă $k\geq 3$. Deoarece $a\leq b\leq c$, avem $bc\geq ca\geq ab$, deci cum $ab+bc+ac\geq 3$ rezultă $bc\geq 1$, adică $p\geq 1$. Notăm $b+c=2s$. Din *Inegalitatea mediilor*, $s\geq p\geq 1$. De asemenea, $a=\dfrac{2s-p^2}{2s-1}$. Deoarece $a\geq 0$ și $2s-1>0$, avem $2s-p^2\geq 0$, deci $s\geq \dfrac{p^2}{2}$. Astfel $s\geq \max\left\{p,\dfrac{p^2}{2}\right\}$. Observăm că $s=p$ dacă și numai dacă $b=c$. De asemenea, pentru orice $p\geq 1$ fixat, funcția $\varphi(s)=\dfrac{2s-p^2}{2s-1}$ este crescătoare pe domeniul său maxim de definiție. Avem

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{2s+2p}+\sqrt{\frac{2s-p^2}{2s-1}}.$$

Cazul 1. $2<p$. Atunci funcția $f(s)=\sqrt{2s+2p}+\sqrt{\dfrac{2s-p^2}{2s-1}}$ este crescătoare pe $\left[\dfrac{p^2}{2},\infty\right)$, ca sumă de funcții crescătoare. Astfel

$$\sqrt{2s+2p}+\sqrt{\frac{2s-p^2}{2s-1}}=f(s)\geq f\left(\frac{p^2}{2}\right)=\sqrt{p^2+2p}.$$

Arătăm întâi că putem avea $s=\dfrac{p^2}{2}$. Într-adevăr, rădăcinile ecuației $t^2-p^2t+p^2=0$ sunt $\dfrac{p\left(p-\sqrt{p^2-4}\right)}{2}<\dfrac{p\left(p+\sqrt{p^2-4}\right)}{2}$. Astfel, pentru $a=0$, $b=\dfrac{p\left(p-\sqrt{p^2-4}\right)}{2}$ și $c=\dfrac{p\left(p+\sqrt{p^2-4}\right)}{2}$ toate condițiile date sunt verificate. Pentru a încheia rezolvarea acestui caz, rezolvăm inecuația $\sqrt{p^2+2p}\geq 3$ și obținem $p\in\left[\sqrt{10}-1,\infty\right)$.

Cazul 2. $p\in[1,2]$. Atunci funcția $f(s)=\sqrt{2s+2p}+\sqrt{\dfrac{2s-p^2}{2s-1}}$ este crescătoare pe $[p,\infty)$, ca sumă de funcții crescătoare. Astfel

$$\sqrt{2s+2p}+\sqrt{\frac{2s-p^2}{2s-1}}=f(s)\geq f(p)=2\sqrt{p}+\sqrt{\frac{p(2-p)}{2p-1}}.$$

Observăm că numerele $a=\dfrac{p(2-p)}{2p-1}$ și $b=c=p$ verifică toate condițiile date. Pentru a încheia rezolvarea acestui caz, rezolvăm inecuația $2\sqrt{p}+\sqrt{\dfrac{p(2-p)}{2p-1}}\geq 3$. Luând $\sqrt{p}=x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, aceasta devine, succesiv: $(x-1)^2(3x^2-2x-3)\leq 0$; $x\in\left[1,\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right]$; $p\in\left[1,\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}\right]$.

Conform celor două cazuri, obținem că $p\in\left[1,\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}\right]\cup\left[\sqrt{10}-1,\infty\right)$.

M 148. *Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = a$, $AD = b$, $a > b$ și fie punctele $M \in (BC)$ și $N \in (CD)$ astfel încât $BM = mb$ și $DN = na$, $m, n \in (0,1)$.*

a) Demonstrați că $[AC$ este bisectoarea unghiului MAN dacă și numai dacă are loc egalitatea

$$\left(\frac{2a^2}{a^2-b^2} - m\right)\left(\frac{2b^2}{a^2-b^2} + n\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2.$$

b) Pentru $a = 28$ și $b = 21$, arătați că nu există $M \in (BC)$ și $N \in (CD)$ astfel încât segmentele CM și CN să aibă lungimile numere naturale și $[AC$ să fie bisectoarea unghiului MAN.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție (*Titu Zvonaru*, Comănești). a) Avem $\operatorname{tg}(\sphericalangle CAM) = tg(\sphericalangle CAB - \sphericalangle MAB) = \frac{\frac{b}{a} - \frac{mb}{a}}{a + \frac{mb^2}{a^2}} = \frac{ab(1-m)}{a^2+mb^2}$ și, analog, $\operatorname{tg}(\sphericalangle CAN) = \frac{ab(1-n)}{b^2+na^2}$. Prin urmare, avem: $\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CAN \Leftrightarrow \frac{ab(1-m)}{a^2+mb^2} = \frac{ab(1-n)}{b^2+na^2} \Leftrightarrow b^2 + na^2 - mb^2 - mna^2 = a^2 + mb^2 - na^2 - mnb^2 \Leftrightarrow 2na^2 - 2mb^2 - mn(a^2-b^2) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \frac{2na^2}{a^2-b^2} - \frac{2mb^2}{a^2-b^2} - mn + \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} = 1 + \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{2a^2}{a^2-b^2} - m\right)\left(\frac{2b^2}{a^2-b^2} + n\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2$.

b) Deoarece segmentele AB și BC au lungimile numere naturale, dacă segmentele CM și CN ar avea lungimile numere naturale atunci și segmentele BM și DN ar avea lungimile numere naturale. Fie $p = BM = 21m < 21$ și $q = DN = 28n < 28$, $p, q \in \mathbb{N}$. Conform punctului a) avem relația

$$\left(\frac{2 \cdot 28^2}{28^2-21^2} - \frac{p}{21}\right)\left(\frac{2 \cdot 21^2}{28^2-21^2} + \frac{q}{28}\right) = \left(\frac{28^2+21^2}{28^2-21^2}\right)^2.$$

Obținem că $(96-p)(72+q) = 3 \cdot 4 \cdot 5^4$.

Încercând pentru p valorile $1, 2, 3, \ldots, 20$ (acelea pentru care $96 - p$ este divizor al lui 7500), nu obținem nicio soluție.

M 149. *Demonstrați că în orice triunghi ABC avem*

$$\left(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) + \frac{9}{2} \cdot \frac{OG^2}{R^2} \geq 18.$$

Nguyen Van Huyen, Vietnam

Soluție (*Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Avem $9OG^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$ și $R = \frac{abc}{4S}$. Deci inegalitatea se rescrie ca

$$\left(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(9 - \frac{16S^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2b^2c^2}\right) \geq 18.$$

De asemenea, conform *Formulei lui Heron*, $4S = \sqrt{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) - \left(a^4+b^4+c^4\right)}$. Notăm $a^2 = x > 0$, $b^2 = y > 0$ și $c^2 = z > 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $x + y + z = 3$. Atunci $xy + yz + zx = 3\left(1 - t^2\right), 0 \leq t < 1$.

Dar $2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)=16S^2>0$, adică $1-4t^2>0$, adică $t<\frac{1}{2}$. Fie $xyz=p$. Inegalitatea devine $\left(1+\sqrt{1-4t^2}\right)\left(\frac{1-t^2}{p}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1-4t^2}{p}\right)\geq 2$.

Să remarcăm că dacă fixăm t, atunci membrul stâng este evident funcție descrescatoare în p. Deci este suficient ca în ultima inegalitate să înlocuim p cu $\max p=(1-t)^2(1+2t)$ (a se vedea, de exemplu, Teorema 2 de la pag. 41 din RMGO 1/2018 (`http://rmgo.upit.ro`)). Astfel este suficient să arătăm că $\left(1+\sqrt{1-4t^2}\right)\left(\frac{1+t}{(1-t)(1+2t)}\right)+\frac{t^2}{2(1-t)^2}\geq 2,\ t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, inegalitate echivalentă succesiv cu $\frac{\left(1+\sqrt{1-4t^2}\right)(1+t)}{1+2t}\geq\frac{3t^2-8t+4}{2(1-t)}$, $\sqrt{1-4t^2}(1+t)\geq\frac{(1-2t)(-3t^2+4t+2)}{2(1-t)}$, $\sqrt{1+2t}(1+t)\geq\frac{\sqrt{(1-2t)}(-3t^2+4t+2)}{2(1-t)}$, $t^2(26t^3-53t^2+16t+20)\geq 0$, adevărat, deoarece $20>80t^2$. Demonstratia este încheiată.

Clasa a X-a

M 150. *Fie $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c+2=abc$. Demonstrați că*

$$(n+ab)(n+bc)(n+ca)\geq(n+4)^3,$$

pentru orice $n>0$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Notând $\sqrt[3]{abc}=t$, din $abc=a+b+c+2\geq 3\sqrt[3]{abc}+2$ obținem inegalitatea $t^3-3t-2\geq 0$, care se rescrie $(t+1)^2(t-2)\geq 0$, de unde $t\geq 2$, adică $abc\geq 8$. Astfel aplicând *Inegalitatea lui Hölder* avem

$$(n+ab)(n+bc)(n+ca)\geq\left(n+\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^3\geq(n+4)^3.$$

Notă. Domnul *Titu Zvonaru* din Comănești a propus o rezolvare asemănătoare, folosind faptul că dacă $a+b+c+2=abc$, $a,b,c>0$, atunci există $x,y,z>0$ astfel încât $a=\frac{y+z}{x}$, $b=\frac{z+x}{y}$ și $c=\frac{x+y}{z}$, deci, folosind *Inegalitatea mediilor*,

$$abc=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geq 8.$$

M 151. *Arătați că pentru orice $a,b,c,d>0$ avem:*

a) $\frac{a}{\sqrt[3]{(a+3b)(a+3c)(a+3d)}}+\frac{b}{\sqrt[3]{(b+3c)(b+3d)(b+3a)}}+\frac{c}{\sqrt[3]{(c+3d)(c+3a)(c+3b)}}+\frac{d}{\sqrt[3]{(d+3a)(d+3b)(d+3c)}}\geq 1;$

b) $$\frac{a(a+2b+c)}{\sqrt[3]{(a+3b)(a+3c)(a+3d)}}+\frac{b(b+2c+d)}{\sqrt[3]{(b+3c)(b+3d)(b+3a)}}+\frac{c(c+2d+a)}{\sqrt[3]{(c+3d)(c+3a)(c+3b)}}$$
$$+\frac{d(d+2a+b)}{\sqrt[3]{(d+3a)(d+3b)(d+3c)}}\geq a+b+c+d.$$

Mihály Bencze, Brașov

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești; *Titu Zvonaru*, Comănești). Conform *Inegalității mediilor*, avem

$$\sqrt[3]{(a+3b)\,(a+3c)\,(a+3d)}\leq\frac{a+3b+a+3c+a+3d}{3}=a+b+c+d$$

și analoagele. Astfel, dacă notăm cu E_1 și E_2 expresiile din membrii din stânga ai inegalităților de la punctele a), respectiv b), rezultă că

$$E_1\geq\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1,$$
$$E_2\geq\frac{a(a+2b+c)}{a+b+c+d}+\frac{b(b+2c+d)}{a+b+c+d}+\frac{c(c+2d+a)}{a+b+c+d}+\frac{d(d+2a+b)}{a+b+c+d}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{a+b+c+d}=\frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d}=a+b+c+d.$$

M 152. *Fie $a,b>0$ cu $a>b+1$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația*

$$(a+b)^x+(a-b)^{\frac{9}{x}}=2\left(a^3+3ab^2\right).$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție. Dacă $x<0$, atunci

$$(a+b)^x+(a-b)^{\frac{9}{x}}\leq(a+b)^0+(a-b)^0=2<2a^3<2\left(a^3+3ab^2\right),$$

deci nu avem soluții $x<0$.

Dacă $x>0$, atunci fie funcțiile

$$f_1,f_2,f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_1(x)=(a+b)^x,\ f_2(x)=(a-b)^{\frac{9}{x}}\text{ și }f=f_1+f_2.$$

f_1 și f_2 sunt strict convexe, f_1 fiind funcție exponențială, iar f_2 compunerea dintre o funcție exponențială strict crescătoare ($x\to(a-b)^x$) și una strict convexă ($x\to\frac{9}{x}$), deci și f este strict convexă. Rezultă că ecuația $f(x)=2\left(a^3+3ab^2\right)$ are cel mult două soluții. Prin calcule, se arată că $x_1=3$ și $x_2=3\log_{a+b}(a-b)$ sunt soluții și $x_1\neq x_2$, deci acestea sunt singurele soluții ale ecuației date.

M 153. *Fie $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$. Arătați că produsul*

$$P=\left(n+\sqrt[n]{n}\right)\left(n+\varepsilon\cdot\sqrt[n]{n}\right)\left(n+\varepsilon^2\cdot\sqrt[n]{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n+\varepsilon^{n-1}\cdot\sqrt[n]{n}\right)$$

este un număr natural par.

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție. Avem $P = x_1x_2 \dots x_n$, unde $x_k = n + \varepsilon^{k-1} \cdot \sqrt[n]{n}$, pentru $k = \overline{1,n}$. Rezultă că $(x_k - n)^n = n\varepsilon^{(k-1)n} = n$ (deoarece $\varepsilon^n = 1$), pentru $k = \overline{1,n}$. Numerele complexe $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$ sunt rădăcinile de ordinul n ale unității și sunt distincte două câte două, deci și numerele complexe $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt distincte două câte două. Astfel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt chiar cele n rădăcini complexe ale ecuației $(X - n)^n - n = 0$. Aplicând *Binomul lui Newton*, ecuația devine

$$X^n - C_n^1 nX^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} n^{n-1} X + (-1)^n n^n - n = 0.$$

Folosind ultima *relație a lui Viète*, rezultă că

$$P = x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \left[(-1)^n n^n - n\right] = n^n + (-1)^{n-1} n,$$

de unde se deduce ușor că P este un număr natural par.

M 154. *Fie ABC un triunghi, ψ cercul înscris în triunghiul ABC, de centru I, iar ω cercul tangent interior cercului circumscris triunghiul ABC în punctul T și tangent la laturile AB și BC în punctele K, respectiv L (cercul ω se numește B-semiînscris sau B-mixtliniar înscris triunghiului ABC). Fie D punctul de tangență al cercului ψ cu latura AC, E al doilea punct de intersecție dintre cercul ψ și BT, în ordinea de la B spre T, iar F al doilea punct de intersecție, în afară de E, dintre cercul circumscris triunghiului EDI și BT.*

Demonstrați că punctele K, F și I sunt coliniare.

Emmanuel Antonio José García, Republica Dominicană

Soluție. Este cunoscut că

$$\sphericalangle ATI \equiv \sphericalangle CTI \text{ și } \sphericalangle ATB = \sphericalangle CTD$$

(a se vedea, de exemplu, E. Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, MAA Press, 2016, pag. 69). Avem $\sphericalangle BTD = \sphericalangle ATC - \sphericalangle ATB - \sphericalangle CTD$. De asemenea, avem $\sphericalangle ATB \equiv \sphericalangle CTD \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle ATC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$, deci $\sphericalangle BTD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB$. Mai mult, cum $IE = ID$ iar TI este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BTD$, rezultă că punctul D este simetricul punctului E față de TI, deci $TE = TD$ și astfel

$$\sphericalangle TED = \sphericalangle TDE = \frac{180^\circ - \sphericalangle BTD}{2} = \frac{180^\circ - \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB}{2} = \frac{\sphericalangle ABC}{2} + \sphericalangle ACB.$$

Patrulaterul $EDIF$ fiind inscriptibil, rezultă că

$$\sphericalangle DIF = \sphericalangle TED = \frac{\sphericalangle ABC}{2} + \sphericalangle ACB.$$

Pe de altă parte, punctele K, I și L sunt coliniare (a se vedea, de exemplu, sursa citată mai sus), prin urmare $\sphericalangle AKI = \sphericalangle AKL = 90^\circ + \dfrac{\sphericalangle ABC}{2}$. În patrulaterul $AKID$ unghiul $\sphericalangle ADI$ este drept, deci

$$\sphericalangle DIK = 270^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle AKI = 180^\circ - \sphericalangle BAC - \frac{\sphericalangle ABC}{2} = \frac{\sphericalangle ABC}{2} + \sphericalangle ACB.$$

Astfel rezultă că $\sphericalangle DIF \equiv \sphericalangle DIK$, prin urmare punctele K, F și I sunt coliniare.

Clasa a XI-a

M 155. *a) Câte soluții are sistemul de ecuații* $\begin{cases} x^3y^{10}x^{12} = e \\ y^4x^{10}y^{11} = e \end{cases}$, $x, y \in \mathcal{S}_4$?

b) Aceeași cerință pentru $x, y \in \mathcal{S}_5$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Folosind echivalențele $\alpha\beta = e \Leftrightarrow \beta = \alpha^{-1} \Leftrightarrow \beta\alpha = e$ (pentru $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_n$), sistemul dat devine $\begin{cases} x^{15}y^{10} = e \\ x^{10}y^{15} = e \end{cases}$. Cu echivalența $x^{10}y^{15} = e \Leftrightarrow x^{15}y^{10}y^5 = x^5$, sistemul devine $\begin{cases} x^5 = y^5 \\ x^{25} = e \end{cases}$.

a) Fie $x, y \in \mathcal{S}_4$. Cum $x^{24} = e$ (conform *Teoremei lui Lagrange*), sistemul devine $\begin{cases} x = e \\ y^5 = e \end{cases}$, care are soluția unică $x = y = e$ (deoarece, conform *Teoremei lui Lagrange*, în $\mathcal{S}_4$ nu există permutări de ordin 5).

b) Fie $x, y \in \mathcal{S}_5$. Conform *Teoremei lui Lagrange*, în $\mathcal{S}_5$ nu există permutări de ordin 25, deci avem echivalențele

$$x^{25} = e \Leftrightarrow x^5 = e \Leftrightarrow x = e \text{ sau } x = \text{ciclu de lungime 5, adică } x = (1\ i_1\ i_2\ i_3\ i_4) \text{ cu}$$

$\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{2, 3, 4, 5\}$. Astfel $x, y \in \{e\} \cup \{(1\ i_1\ i_2\ i_3\ i_4) \mid \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{2, 3, 4, 5\}\}$. Deci sistemul are în total $(1 + 4!)^2 = 625$ soluții.

M 156. *Fie* $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *și* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{C})$ *astfel încât* $(ABC)^q = ABC$, $(BCA)^r = BCA$ *și* $(CAB)^s = CAB$.

a) Demonstrați că $\operatorname{rang}(ABC) = \operatorname{rang}(BCA) = \operatorname{rang}(CAB)$.

b) Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la una dintre egalitățile din ipoteză?

* * *

Soluție. a) Vom folosi inegalitățile $\operatorname{rang}(XY) \leq \operatorname{rang}(X)$ și $\operatorname{rang}(XY) \leq \operatorname{rang}(Y)$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $Y \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$.

Astfel, din $ABC = (ABC)^q = A(BCA)BC(ABC)^{q-2}$ rezultă că $\operatorname{rang}(ABC) \leq \operatorname{rang}(BCA)$. Analog se obține că $\operatorname{rang}(BCA) \leq \operatorname{rang}(CAB)$ și $\operatorname{rang}(CAB) \leq \operatorname{rang}(ABC)$, prin urmare $\operatorname{rang}(ABC) = \operatorname{rang}(BCA) = \operatorname{rang}(CAB)$.

b) Răspunsul este NU. De exemplu, dacă se renunță la egalitatea $(CAB)^s = CAB$, putem lua matricele A, B, C definite prin

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j = 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}, b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = 1 \text{ și } j = 2 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}, c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j = 1 \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

și avem $BC = O_{n,m}$, deci $(ABC)^q = ABC = O_m$ și $(BCA)^r = BCA = O_n$, dar $ABC = O_m$ și $CAB \neq O_p$, deci $\operatorname{rang}(CAB) \neq 0 = \operatorname{rang}(ABC)$.

M 157. *Fie triunghiul ABC și M un punct interior acestuia. Notăm cu x, y și z ariile triunghiurilor MBC, MCA, respectiv MAB.*

a) Arătați că există cel mult un triunghi XYZ astfel încât $A \in YZ$, $B \in ZX$, $C \in XY$ și dreptele XA, YB și ZC sunt concurente în M.

b) Determinați cazurile în care nu există triunghiul XYZ cu proprietățile menționate.

c) Determinați cazurile în care triunghiul XYZ există, iar punctele A, B și C aparțin chiar segmentelor (YZ), (ZX), respectiv (XY).

d) În cazul în care triunghiul XYZ există, exprimați aria lui în funcție de x, y și z.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Considerăm $A(k,t)$, $B(-u,-1)$, $C(v,-1)$ și $M(0,0)$, cu $k,t,u,v \in \mathbb{R}$. Mai mult, x,y,z sunt coordonatele baricentrice ale lui M in raport cu $\triangle ABC$. Avem $xk-yu+zv=0$ și $xt-y-z=0$, deci $k=\dfrac{yu-zv}{x}$ și $t=\dfrac{y+z}{x}$. Pe de altă parte, este evident că dacă există X,Y și Z cu proprietatea de la punctul a), atunci există $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ a.î.

$$X(\alpha k, \alpha t) = X\left(\frac{\alpha(yu-zv)}{x}, \frac{\alpha(y+z)}{x}\right),\ Y(-\beta u, -\beta),\ Z(\gamma v, -\gamma).$$

Deoarece Y,A,Z sunt coliniare, avem $\begin{vmatrix} \frac{yu-zv}{x} & \frac{y+z}{x} & 1 \\ -\beta u & -\beta & 1 \\ \gamma v & -\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci $\gamma y+\beta z=-\beta\gamma x$. Dacă, prin absurd, $\beta\gamma=0$, atunci $y=0$ sau $z=0$, fals. Deci $\beta\gamma\neq 0$, prin urmare $\dfrac{1}{\beta}\cdot y+\dfrac{1}{\gamma}\cdot z=-x$. Analog, Z,B,X coliniare implică $\dfrac{1}{\gamma}\cdot z+\dfrac{1}{\alpha}\cdot x=-y$, iar X,C,Y coliniare implică $\dfrac{1}{\alpha}\cdot x+\dfrac{1}{\beta}\cdot y=-z$. Astfel, $\begin{pmatrix} 0 & y & z \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ și cum $\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 2xyz > 0$ obținem soluția

$$\frac{1}{\alpha}=-\frac{y+z-x}{2x},\ \frac{1}{\beta}=-\frac{z+x-y}{2y},\ \frac{1}{\gamma}=-\frac{x+y-z}{2z}.$$

Putem presupune că $x\geq y\geq z$. Dacă $y+z=x$, atunci $\dfrac{1}{\alpha}=0$, imposibil, deci nu există $\triangle XYZ$ menționat. Dacă $y+z\neq x$, atunci α,β și γ sunt nenule și unic determinate. Avem $\overrightarrow{MX}=-\dfrac{2x}{y+z-x}\cdot\overrightarrow{MA}$, deci $X-M=\dfrac{2x}{y+z-x}\cdot(M-A)$ și cum $M=\dfrac{xA+yB+zC}{x+y+z}$ obținem $X=\dfrac{-xA+yB+zC}{y+z-x}$. Analog, $Y=\dfrac{xA-yB+zC}{z+x-y}$ și $Z=\dfrac{xA+yB-zC}{x+y-z}$. Evident X,Y,Z sunt necoliniare. Așadar, am rezolvat deja punctele a) și b) ale problemei.

Presupunem că $y+z>x$. Prin verificare directă obținem că A,B,C aparțin segmentelor (YZ), (ZX), respectiv (XY). Dacă $y+z<x$, atunci cum $\alpha>0$ și $\beta,\gamma<0$, deducem că B,C sunt în exteriorul segmentelor $[ZX]$, respectiv $[XY]$. Așadar, pentru punctul c) răspunsul este: dacă și numai dacă x,y,z sunt laturile unui triunghi.

Calculăm aria $[XYZ]$ a triunghiului XYZ. Avem $X\left(\dfrac{-x}{y+z-x}:\dfrac{y}{y+z-x}:\dfrac{z}{y+z-x}\right)$, $Y\left(\dfrac{x}{z+x-y}:\dfrac{-y}{z+x-y}:\dfrac{z}{z+x-y}\right)$ și $Z\left(\dfrac{x}{x+y-z}:\dfrac{y}{x+y-z}:\dfrac{-z}{x+y-z}\right)$. Rezultă că

$\dfrac{[XYZ]}{[ABC]} = |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{-x}{y+z-x} & \frac{y}{y+z-x} & \frac{z}{y+z-x} \\ \frac{x}{z+x-y} & \frac{-y}{z+x-y} & \frac{z}{z+x-y} \\ \frac{x}{x+y-z} & \frac{y}{x+y-z} & \frac{-z}{x+y-z} \end{vmatrix} = \dfrac{4xyz}{(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$. Dar $[ABC] = x+y+z$, deci $[XYZ] = \dfrac{4xyz(x+y+z)}{|(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)|}$. Astfel și punctul d) este rezolvat.

În încheiere, vom prezenta câteva concluzii geometrice, precum și interpretări probabilistice pentru punctele a), b) și c) de mai sus. Fie U, V și W mijloacele segmentelor (BC), (CA), respectiv (AB). Considerăm $u, v, w \in \mathbb{R}$ cu $u+v+w=1$ coordonatele baricentrice ale lui M în raport cu $\triangle UVW$. Deci $M = uU + vV + wW = \dfrac{(v+w)A + (w+u)B + (u+v)C}{2}$, prin urmare $\dfrac{xA+yB+zC}{x+y+z} = \dfrac{(v+w)A + (w+u)B + (u+v)C}{2}$, deci $\dfrac{x}{x+y+z} = \dfrac{v+w}{2}$, $\dfrac{y}{x+y+z} = \dfrac{w+u}{2}$ și $\dfrac{z}{x+y+z} = \dfrac{u+v}{2}$. Non-existența triunghiului XYZ este descrisă complet mai sus de formula $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = 0$. Dacă $y+z-x=0$, atunci $z+x-y > 0$ și $x+y-z > 0$, deci $u = 0$ și $v, w > 0$, și reciproc. Analog în cazurile $z+x-y=0$, respectiv $x+y-z=0$. În concluzie, $\triangle XYZ$ nu există dacă și numai dacă $M \in (UV) \cup (VW) \cup (WU)$. Deci dacă punctul M este distribuit uniform în interiorul $\triangle ABC$, atunci probabilitatea să existe $\triangle XYZ$ menționat mai sus este egală cu 1. Utilizând un raționament similar, deducem că există $\triangle XYZ$ astfel încât A, B, C aparțin segmentelor (YZ), (ZX), (XY) dacă și numai dacă $M \in \text{Int}\,(\triangle UVW)$. Astfel probabilitatea să existe $\triangle XYZ$ astfel încât A, B, C aparțin segmentelor (YZ), (ZX), (XY) este egală cu $\dfrac{1}{4}$.

M 158. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât*

$$x_{n+2} \leq x_n + \frac{1}{n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ definit prin $a_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ este convergent.

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Avem $x_{n+2} \leq x_n + \dfrac{1}{n(n-1)}$, adică $x_{n+2} + \dfrac{1}{n} \leq x_n + \dfrac{1}{n-1}$, deci $x_{n+2} + \dfrac{1}{n+1} < x_n + \dfrac{1}{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$. Rezultă că șirurile $\left(x_{2n} + \dfrac{1}{2n-1}\right)_{n\geq 1}$ și $\left(x_{2n+1} + \dfrac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$ sunt descrescătoare. Aceste șiruri au termenii pozitivi, deci sunt convergente. Prin urmare șirurile $(x_{2n})_{n\geq 1}$ și $(x_{2n+1})_{n\geq 1}$ sunt convergente. Fie $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ și $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$, deci $b, c \in [0, +\infty)$. Folosind *Criteriul radicalului* rezultă că $a_{2n} \to \sqrt{bc}$ și $a_{2n+1} \to \sqrt{bc}$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este convergent către $\sqrt{bc}$.

M 159. *Fie $a > 1$ un număr real fixat. Rezolvați ecuația*

$$x + a^{6\log_x a} + x \cdot a^{6\log_x a} = a^2 + a^3 + a^5.$$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Domeniul de definiție al ecuației este $D = (0,1) \cup (1,\infty)$.

Cazul 1. $x \in (0,1)$. Atunci $\log_x a < 0$, deci $x+a^{6\log_x a}+x\cdot a^{6\log_x a} < 1+1+1 = 3 < a^2+a^3+a^5$, prin urmare ecuația nu are soluții $x \in (0,1)$.

Cazul 2. $x \in (1,\infty)$. Notând $\log_x a = t > 0$, de unde $x^t = a$, deci $x = a^{\frac{1}{t}}$, iar ecuația devine $f(t) = a^2 + a^3 + a^5$, unde $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = a^{\frac{1}{t}} + a^{6t} + a^{\frac{1}{t}+6t}$.

Prin calcule ușoare obținem că $f''(t) > 0$ pentru orice $t > 0$, deci funcția f este strict convexă. Rezultă că ecuația $f(t) = a^2 + a^3 + a^5$ are cel mult două soluții. Cum $t_1 = \dfrac{1}{2}$ și $t_2 = \dfrac{1}{3}$ verifică ecuația, rezultă că acestea sunt singurele sale soluții. Prin urmare $x_1 = a^2$ și $x_2 = a^3$ sunt singurele soluții ale ecuatiei din enunț.

Clasa a XII-a

M 160. *a) Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo n are exact 11 divizori ai lui zero (diferiți de zero).*

b) Care este cardinalul minim al unui inel cu exact 11 divizori ai lui zero (diferiți de zero)?

* * *

Soluție. a) Numărul de divizori ai lui zero din inelul $\mathbb{Z}_n$ este $n-1-\varphi(n)$, unde $\varphi(n)$ (*Indicatorul lui Euler*) reprezintă numărul de numere naturale mai mici decât n și prime cu n și poate fi calculat cu formula $\varphi(n) = p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1}\dots p_r^{k_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)$, unde $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r}$ este descompunerea lui n în factori primi. Presupunem că $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Astfel condiția ca inelul $\mathbb{Z}_n$ să aibă exact 11 divizori ai lui zero este $n - \varphi(n) = 12$, adică

$$p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1}\dots p_r^{k_r-1}\left[p_1p_2\dots p_r - (p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1)\right] = 12.$$

Pentru $r \geq 3$, notând $p_i - 1 = q_i$, $i = \overline{1,r}$, avem $p_1p_2\dots p_r - (p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1) = (1+q_1)(1+q_2)\dots(1+q_r) - q_1q_2\dots q_r \geq 1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 \geq 1+1+2+4+1\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 4 > 12$, deci nu avem soluție.

Pentru $r = 1$ obținem $p_1^{k_1-1} = 12$, fals.

Pentru $r = 2$ obținem $p_1^{k_1-1}p_2^{k_2-1}(p_1+p_2-1) = 12$. Dacă $p_1 > 2$ ar rezulta că $p_1+p_2-1 \geq 3+5-1 = 7$ este un divizor impar al lui 12, fals. Deci $p_1 = 2$ și $2^{k_1-1}p_2^{k_2-1}(p_2+1) = 12$. Cum $p_2+1 \geq 4$ rezultă $k_1 \leq 2$. Pentru $k_1 = 1$ obținem $p_2^{k_2-1}(p_2+1) = 12$, $p_2 \geq 3$ impar, cu soluțiile $p_2 = 3$ și $k_2 = 2$, deci $n = 2\cdot 3^2 = 18$, sau $p_2 = 11$ și $k_2 = 1$, deci $n = 2\cdot 11 = 22$. Pentru $k_1 = 2$ obținem $p_2^{k_2-1}(p_2+1) = 6$, $p_2 \geq 3$ impar, cu soluția $p_2 = 5$ și $k_2 = 1$, deci $n = 2^2\cdot 5 = 20$.

În concluzie, $n \in \{18, 20, 22\}$.

b) Evident, $n \geq 13$. Este cunoscut că, pentru p număr prim, orice inel cu p elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_p$, iar, pentru p, q numere prime distincte, orice inel cu pq elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_{pq}$. Astfel $n = 13$, $n = 14$ și $n = 15$ nu convin. Deoarece inelul $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ are $16 - 2\cdot 2 - 1 = 11$ divizori ai lui zero, rezultă că numărul minim cerut este $n = 16$.

M 161. *Calculați* $\displaystyle\int \frac{4x^4+3x^2+2}{x^5+x^3+x}\,dx,\ x\in(0,\infty).$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Integrala dată se poate descompune astfel: $\displaystyle\int \frac{4x^4+3x^2+2}{x^5+x^3+x}\,dx = \int \frac{5x^4+3x^2+1}{x^5+x^3+x}\,dx + \int \frac{1-x^4}{x^5+x^3+x}\,dx = \int \frac{(x^5+x^3+x)'}{x^5+x^3+x}\,dx + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}\right)dx = \int \frac{(x^5+x^3+x)'}{x^5+x^3+x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{(x^4+x^2+1)'}{x^4+x^2+1}\,dx = \ln\frac{(x^5+x^3+x)\,x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} + \mathcal{C}.$

M 162. *Fie* $a,b,\lambda>0$, $a\neq b$. *Arătați că* $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{a^x+b^{\lambda-x}}{b^x+a^{\lambda-x}}\,dx > \lambda.$

Marin Chirciu, Pitești (Enunț modificat)

Soluție. Fie $I = \displaystyle\int_0^\lambda \frac{a^x+b^{\lambda-x}}{b^x+a^{\lambda-x}}\,dx$. Cu substituția $x=\lambda-t$ obținem $I = \displaystyle\int_0^\lambda \frac{a^{\lambda-t}+b^t}{b^{\lambda-t}+a^t}\,dt$. Prin adunare rezultă că $2I = \displaystyle\int_0^\lambda \frac{a^x+b^{\lambda-x}}{b^x+a^{\lambda-x}}\,dx + \int_0^\lambda \frac{a^{\lambda-x}+b^x}{b^{\lambda-x}+a^x}\,dx = \int_0^\lambda f(x)\,dx$, unde $f(x) = \dfrac{a^x+b^{\lambda-x}}{b^x+a^{\lambda-x}} + \dfrac{b^x+a^{\lambda-x}}{a^x+b^{\lambda-x}}$, pentru orice $x\in[0,\lambda]$. Evident, $f(x)\geq 2$ pentru orice $x\in[0,\lambda]$, iar egalitatea are loc dacă și numai dacă $\dfrac{a^x+b^{\lambda-x}}{b^x+a^{\lambda-x}} = 1$, adică $a^x-b^x = a^{\lambda-x}-b^{\lambda-x}$. Această ecuație are forma $g(x) = g(\lambda-x)$, unde $g(x) = a^x-b^x$, pentru orice $x\in[0,\lambda]$. Avem $g'(x) = a^x\ln a - b^x\ln b$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a>b$.

Cazul 1. Dacă $a\geq 1$, atunci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in[0,\lambda]$, deci g este strict crescătoare, deci ecuația $g(x)=g(\lambda-x)$ are doar soluția $x=\dfrac{\lambda}{2}$. Astfel $f(x)>2$ pentru orice $x\neq\dfrac{\lambda}{2}$.

Cazul 2. Dacă $a<1$, atunci ecuația $g'(x)=0$ se scrie $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$, adică $x=x_0$, unde $x_0 = \log_{\frac{a}{b}}\dfrac{\ln b}{\ln a} > 0$.

Cazul 2.1. Dacă $x_0\geq\lambda$, atunci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in[0,\lambda)$, deci din nou g este strict crescătoare, deci $f(x)>2$ pentru orice $x\neq\dfrac{\lambda}{2}$.

Cazul 2.2. Dacă $x_0<\lambda$, atunci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in[0,x_0)$ și $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(x_0,\lambda]$, deci g este strict crescătoare pe $[0,x_0]$ și strict descrescătoare pe $[x_0,\lambda]$. Cum $g(0)=0$ și $g(\lambda) = a^\lambda - b^\lambda > 0$, rezultă că există $x_1\in(0,x_0)$ a.î. $g(x_1)=g(\lambda)$, $g(x)<g(\lambda)$ pentru orice $x<x_1$ și $g(x)\geq g(\lambda)$ pentru orice $x\geq x_1$, deci ecuația $g(x)=y$ are soluție unică pentru orice $y\in[0,g(\lambda))$, prin urmare ecuația $g(x)=g(\lambda-x)$ nu are soluții $x\in[0,x_1)\setminus\left\{\dfrac{\lambda}{2}\right\}$. Astfel $f(x)>2$ pentru orice $x\in[0,x_1)$, $x\neq\dfrac{\lambda}{2}$.

În concluzie, rezultă că $2I = \displaystyle\int_0^\lambda f(x)\,dx > \int_0^\lambda 2\,dx = 2\lambda$, deci $I>\lambda$.

M 163. *Determinați cel mai mic număr real a pentru care inegalitatea*

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq 3$$

are loc pentru orice numere reale $x, y, z \geq a$ astfel încât $x + y + z = 3$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Dacă $a = 0$, atunci din *Inegalitatea mediilor putere* (a se vedea, de exemplu, pagina web `https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_mean#Inequality_between_any_two_power_means`) avem $x^5 + y^5 + z^5 \geq 3$ pentru orice $x, y, z \geq a$ cu $x + y + z = 3$. Prin urmare trebuie să studiem cazul $a < 0$. În acest caz, considerăm funcția $f : [a, 3 - 2a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$. Evident, f este strict convexă pe intervalul $[1, 3 - 2a]$.

Conform *Teoremei funcțiilor semi-convexe* (Vasile Cîrtoaje, 2004, a se vedea, de exemplu, pag. 83 din RMGO 1/2019 (`http://rmgo.upit.ro`)), inegalitatea $f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f(1) = 3$ are loc pentru orice $x, y, z \geq a$ cu $x + y + z = 3$ dacă și numai dacă $2f(t) + f(3 - 2t) \geq 3f(1) = 3$ pentru orice $t \in \left[a, \frac{3-a}{2}\right]$. În cazul nostru $2t^5 + (3 - 2t)^5 \geq 3$ pentru orice $t \in \left[a, \frac{3-a}{2}\right]$, adică $(t-1)^2(t^3 - 6t^2 + 11t - 8) \leq 0$ pentru orice $t \in \left[a, \frac{3-a}{2}\right]$.

Evident, dacă γ este o rădăcină reală a ecuației cubice $t^3 - 6t^2 + 11t - 8 = 0$, atunci $\gamma > 0$. Cum 1, 2, 4 și 8 nu sunt rădăcini ale acestei ecuații, rezultă că γ este un număr irațional. Notând $t - 2 = u$ ecuația devine $u^3 - u - 2 = 0$. Luând $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(v + \frac{1}{v}\right)$, rezultă că această ecuație are rădăcina reală unică $\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}}$. Astfel $\gamma = 2 + \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}}$, deci $\gamma > 3$. Rezultă că $t^3 - 6t^2 + 11t - 8 = (t - \gamma)(t^2 + mt + n)$, cu $t^2 + mt + n > 0$ pentru orice $t \in \left[a, \frac{3-a}{2}\right]$. Astfel condiția $(t-1)^2(t^3 - 6t^2 + 11t - 8) \leq 0$ pentru orice $t \in \left[a, \frac{3-a}{2}\right]$ este echivalentă cu $t - \gamma \leq 0$ pentru orice $t \in \left[a, \frac{3-a}{2}\right]$. Astfel $\frac{3-a}{2} - \gamma \leq 0$, adică $a \geq 3 - 2\gamma = -1 - 2\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}}\right)$.

În concluzie, numărul minim cerut este $a = -1 - 2\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{26}{27}}}\right)$.

M 164. *Fie $q > 1$ un număr real fixat. Considerăm mulțimea*

$$S = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 4 \text{ și } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4q\right\}$$

și funcția $E : S \to \mathbb{R}$, $E(a, b, c, d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 12abcd$.

Determinați $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in S$ pentru care $E(a_1, b_1, c_1, d_1) \geq E(a, b, c, d)$, $\forall (a, b, c, d) \in S$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Fie $t=\sqrt{\dfrac{q-1}{3}}>0$ și polinomul $f(u)=(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)$. Avem $f(u)=u^4-4u^3+mu^2-nu+p$, unde $m=ab+bc+cd+da+ac+bd$, $n=abc+abd+acd+bcd$ și $p=abcd$. Remarcăm că $m=8-2q$, deci m este fixat. Din *Relațiile lui Newton* obținem că $E(a,b,c,d)=64q-16m-4mq+16n+8p$. Cum $f(-2)=48+4m+2n+p$, obținem că $E(a,b,c,d)-8f(-2)=F(q)$, deci $E(a,b,c,d)=F(q)+8(-2-a)(-2-b)(-2-c)(-2-d)$. Astfel pentru a determina $\max E(a,b,c,d)$ este suficient să determinăm

$$\max\left[(-2-a)(-2-b)(-2-c)(-2-d)\right]=\max\left[(2+a)(2+b)(2+c)(2+d)\right].$$

Notăm $2+a=x$, $2+b=y$, $2+c=z$, $2+d=w$. Atunci $x+y+z+w=12$ și $x^2+y^2+z^2+w^2=4(9+3t^2)$. Deci dacă $s=3$ atunci $x+y+z+w=4s$ și $x^2+y^2+z^2+w^2=4(s^2+3t^2)$.

Utilizând rezultatele din articolul *Some Refinements of the AM-GM and Suranyi Inequalities* din RecMat 2/2020, avem că dacă $t\in\left(0,\dfrac{2s}{3}\right)$, adică $t\in(0,2)$, atunci $\max xyzw$ se obține pentru permutările lui $(3-t,3-t,3-t,3+3t)$.

Dacă $t=\dfrac{2s}{3}$, adică $t=2$, atunci analog soluției Problemei **MGO 118** din RMGO 1/2020 avem că $\max xyzw$ se obține pentru permutările lui $(1,1,1,9)$ sau pentru permutările lui $\left(3-2\sqrt{3},3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}\right)$.

Dacă $t>\dfrac{2s}{3}$, adică $t>2$, atunci conform rezultatelor din articolului menționat mai sus, $\max xyzw$ se obține pentru permutările lui $\left(3-t\sqrt{3},3-t\sqrt{3},3+t\sqrt{3},3+t\sqrt{3}\right)$.

În concluzie: dacă $1<q<13$ atunci

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)=\left(1-\sqrt{\frac{q-1}{3}},1-\sqrt{\frac{q-1}{3}},1-\sqrt{\frac{q-1}{3}},1+3\sqrt{\frac{q-1}{3}}\right)$$

sau permutările; dacă $q=13$ atunci $(a_1,b_1,c_1,d_1)=(-1,-1,-1,7)$ sau permutările sau $(a_1,b_1,c_1,d_1)=\left(1-2\sqrt{3},1-2\sqrt{3},1+2\sqrt{3},1+2\sqrt{3}\right)$ sau permutările; dacă $q>13$ atunci $(a_1,b_1,c_1,d_1)=\left(1-\sqrt{q-1},1-\sqrt{q-1},1+\sqrt{q-1},1+\sqrt{q-1}\right)$ sau permutările.

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 185. Arătați că pentru orice numere naturale x_1, x_2, x_3, supraunitare și distincte două câte două, avem

$$6 < \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(2+\frac{1}{x_2}\right)\left(3+\frac{1}{x_3}\right) \leq \frac{91}{8}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 186. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că

$$\frac{ab(a+2b)}{2b+c} + \frac{bc(b+2c)}{2c+a} + \frac{ca(c+2a)}{2a+b} \leq \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca}{3}.$$

Mihály Bencze, Brașov

M 187. Fie $n > 1$ un număr natural impar. Se consideră numerele reale $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ astfel încât $a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots = a_nb_n$ și $a_1^n + b_1^n = a_2^n + b_2^n = \ldots = a_n^n + b_n^n$. Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists i = \overline{1,n} \text{ a.î. } a_i = x\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists i = \overline{1,n} \text{ a.î. } b_i = x\}.$$

Arătați că avem $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \in \{1, 2\}$.

Rămâne concluzia adevărată dacă n este număr par?

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 188. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă R, R_1 și R_2 sunt lungimile razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, ABD, respectiv ACD, iar r, r_1 și r_2 sunt lungimile razelor cercurilor înscrise în aceste triunghiuri, să se arate că

$$\frac{R+R_1+R_2}{r+r_1+r_2} \geq 1+\sqrt{2}.$$

Când are loc egalitatea?

Marin Chirciu, Pitești

M 189. Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\sum \frac{l_a}{h_a} - \prod \frac{l_a}{h_a} \leq 2.$$

Daniel Jinga, Pitești

Clasa a X-a

M 190. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $0{,}8 < a < 1$, fixate. Demonstrați că o infinitate de numere de forma $\sqrt{n^2 + an + b}$, unde $n \in \mathbb{N}$, au cifra zecimilor egală cu 4.

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $1{,}2 < a < 1{,}5$, fixate. Demonstrați că o infinitate de numere de forma $\sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$, unde $n \in \mathbb{N}$, au cifra zecimilor egală cu 4.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 191. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 2^{4x} + 6^{2x+2} + 36 \cdot 3^{4x} = 49x^2 + 7|x|.$$

Daniel Jinga, Pitești

M 192. a) Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ecuația

$$\left(3x^4 + 1\right)\left(3y^4 + 1\right) = 12xy\left(x^2 + y^2\right) - 8.$$

b) Câte soluții are această ecuație în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$?

Miguel Amengual Covas, Spania și *Doru Anastasiu Popescu*, România

M 193. Determinați valorile reale ale lui k pentru care inegalitatea

$$(a + b + c - 1)^2 + k - 1 \geq \frac{k+3}{8} \cdot (a + b)(b + c)(c + a)$$

are loc pentru orice numere reale nenegative a, b și c astfel încât

$$ab + bc + ca + abc \leq 4.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

M 194. Fie ABC un triunghi. Demonstrați că pentru orice punct M situat pe cercul înscris triunghiului ABC aven

$$10r^2 \leq \left(1 - \frac{r}{r_a}\right) MA^2 + \left(1 - \frac{r}{r_b}\right) MB^2 + \left(1 - \frac{r}{r_c}\right) MC^2 \leq 5Rr.$$

Când au loc egalitățile?

Marin Chirciu, Pitești

Clasa a XI-a

M 195. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și permutarea $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ definită prin

$$\sigma(i) = i + (-1)^{i-1},\ i = \overline{1, 2n},$$

Câte soluții $x \in \mathcal{S}_{2n}$ are ecuația $x\sigma = \sigma x$?

Sorin Ulmeanu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 196. Dacă a, b și x sunt numere reale care verifică relațiile

$$\begin{cases} a\cos x - b\sin x = \cos 2x \\ a\sin x + b\cos x = 2\sin 2x \end{cases}$$

iar z este numărul complex $z = \sqrt[3]{a+b} + i\sqrt[3]{a-b}$, determinați $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z^n = 1 + i$.

Marin Chirciu, Pitești

M 197. Fie $a > 0$ un număr real fixat și fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 = a \text{ și } \quad nx_{n+1} = (n+1)\left(ax_n + na^{n+1}\right),\ \forall\, n \geq 1.$$

Calculați limita $\quad L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n^2]{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k} \right)^{\frac{n^2}{x_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{x_k}}$.

Florică Anastase, Lehliu-Gară

M 198. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + mx + 1$, unde $m > -\dfrac{9}{4}$.

Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are exact o soluție reală.

Daniel Jinga, Pitești

M 199. Determinați cea mai mare constantă $k \geq 1$ pentru care inegalitatea

$$\frac{1}{(ka+b+c)^2} + \frac{1}{(kb+c+a)^2} + \frac{1}{(kc+a+b)^2} \leq \frac{3}{(k+2)^2}$$

are loc pentru orice numere reale nenegative a, b și c astfel încât $ab + bc + ca = 3$.

Vasile Cîrtoaje, Ploiești și *Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XII-a

M 200. Fie G un grup abelian. Arătați că dacă există $a, b, c \in G$ astfel încât ord $(a) = 4$, ord $(b) = 5$ și ord $(c) = 6$, atunci există $x \in G$ astfel încât ord $(x) = 60$.

Rămâne concluzia adevărată dacă se renunță la ipoteza că grupul G este abelian?

* * *

M 201. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2$ variabile, $n \geq 1$. Definim următoarele polinoame:

$$S_k = \sum_{i=1}^{2n} x_i^k,\ k = \overline{1,4},$$

$$P = S_4 - 2(y_1 + y_2)S_3 + (y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2)S_2 - 2y_1y_2(y_1 + y_2)S_1 + 2ny_1^2y_2^2.$$

a) Arătați că pentru orice $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ există $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2) = 0.$$

b) Arătați că dacă numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{Z}$ satisfac $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, y_1, y_2) = 0$ pentru anumiți $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$, atunci cel puțin n dintre aceste $2n$ numere sunt egale.

Mihai Prunescu, București

M 202. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și derivabilă, cu $f(0) = 0$. Demonstrați că

$$\int_1^2 (3 - x)f'(\ln x)\, dx \geq 2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 203. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Arătați că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $\sqrt{c^2 + 1} \cdot f(c) = 1$.

Mihály Bencze, Brașov

M 204. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \geq \dfrac{1}{4n - 2}$ numere reale astfel încât

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2n} x_i x_j \geq n(2n - 1).$$

Demonstrați că

$$(2n - 1)\left(8n^2 - 8n + 1\right)\sum_{i=1}^{2n} x_i - n\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i} \geq 2n(n - 1)(4n - 1)^2.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Vasile Cîrtoaje*, Ploiești

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 106 (**puteri**). Se dau trei numere naturale a, b și c, $a < b$, c număr prim. Notăm cu Nr numărul de puteri ale lui c din intervalul $[a, b]$.

Cerință

Cunoscând a, b și c, se cere să se determine Nr.

Restricții și precizări

- a, b sunt numere naturale cu maxim 10 cifre;
- $c < 100000$.

Exemplu

Date de intrare

$a = 4$, $b = 30$, $c = 3$.

Date de ieșire

2 (9 si 27 sunt puterile lui 3 din intervalul [4, 30]).

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 107 (**lit**). Se dă un șir de caractere, care se termină cu *Enter*. Numim secvență **3-litere** o succesiune de trei litere mici aflate pe poziții consecutive în șirul dat.

Cerință

Pentru un șir de caractere dat, determinați numărul de secvențe 3-litere, precum și pozițiile de început ale primei și ultimei secvențe 3-litere.

Restricții și precizări

- Sirul de caractere are cel mult 100000 caractere, litere mari, litere mici sau cifre;
- Șirul de caractere se termină cu *Enter*;
- Pozițiile în șirul de caractere încep cu 1.

Date de intrare

Fișierul `lit.in` conține pe prima linie șirul de caractere.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `lit.out` va conține pe prima linie cele trei numere din cerință cu spațiu între ele.

Exemplu

lit.in	lit.out	Explicație
Ab5xyza1bzs7	**3 4 9**	Cele trei secvențe 3-litere sunt xyz, yza și bzs. Prima începe pe poziția 4, iar ultima pe poziția 9.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 108 (**progresie**). Se dau M si N, numere naturale nenule. Se cere să se determine suma S a primilor N termeni din progresia aritmetică având primul termen egal cu prima cifră a lui M și rația egală cu suma cifrelor lui M.

Cerință

Cunoscând M și N, se cere să se determine suma S.

Restricții și precizări

- $0 < M < 1000000000$;
- $0 < N < 1000$.

Date de intrare

Fișierul `progresie.in` conține pe prima linie valorile lui M și N separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul `progresie.out` va conține pe prima linie valoarea sumei S.

Exemplu

progresie.in	progresie.out	Explicație
2103 5	70	N = 5, progresia aritmetică are primul termen 2 și rația 6 (3+0+1+2 = 6). Astfel S = 2 + 8 + 14 + 20 + 26, deci S = 70.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 109 (**putere primă**). Un număr se numește **putere primă** dacă se poate scrie ca o putere cu baza un număr prim (exemplu: 81 este putere primă pentru că $81 = 3^4$). Pentru un șir de numere care se termină cu 0, se cere să se determine numărul de *puteri prime* pe care le conține.

Cerință

Cunoscând șirul de numere, determinați numărul de *puteri prime* pe care le conține.

Restricții și precizări

- Numerele din șir au fiecare maxim 10 cifre;

- Numărul de termeni din șirul dat este cel mult 100000.

Date de intrare

Fișierul `pp.in` conține pe o linie termenii șirului separați prin câte un spațiu. Șirul se termină cu 0.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `pp.out` va conține numărul de numere *puteri prime* din șirul dat.

Exemplu

pp.in	pp.out	Explicație
2 100 81 78 125 777 0	3	Numerele *puteri prime* din șir sunt: 2, 81 și 125.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 110 (cuvinte). Se dau n cuvinte. Determinați numărul de cuvinte ce se pot forma cu toate literele mici distincte și comune celor n cuvinte date.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$;
- Cuvintele au fiecare cel mult 30 de litere mici.

Date de intrare

Fișierul `cuvinte.in` conține pe prima linie n, iar pe celelalte n linii cuvintele.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `cuvinte.out` va conține numărul de cuvinte ce se pot forma cu condiția din enunț.

Exemplu

cuvinte.in	cuvinte.out	Explicație
3 vara antarctica rata	2	Literele mici distincte și comune celor 3 cuvinte sunt a și r. Cu acestea se pot forma doar două cuvinte: ra ar

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

Clasa a X-a

I 111 (**litere**)**.** Se dau n cuvinte. Determinați numărul de cuvinte nevide ce se pot forma cu literele mici distincte și comune celor n cuvinte date.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$;
- Cuvintele au fiecare cel mult 30 de litere mici;
- Cuvintele care se numără au fiecare litere distincte.

Date de intrare

Fișierul `litere.in` conține pe prima linie n, iar pe celelalte n linii cuvintele.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `litere.out` va conține numărul de cuvinte ce se pot forma cu condiția din enunț.

Exemplu

`litere.in`	`litere.out`	Explicație

`3`
`vara`
`antarctica`
`rata`
	`4`	Literele mici distincte și comune celor 3 cuvinte sunt a și r. Cu acestea se pot forma doar patru cuvinte:
		r
		a
		ra
		ar

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 112 (**intervale**)**.** Se dau n perechi de numere naturale nenule, ce reprezintă intervale de forma $[a, b]$, $a < b$. Afișați intervalele ordonate crescător după numărul de numere prime pe care le conțin.

Cerință

Pentru n intervale date, afișați aceste intervale ordonate crescător după numărul de numere prime pe care le conțin.

Restricții și precizări

- $n < 5000$;
- Capetele intervalelor sunt numere naturale nenule cu maxim 6 cifre.

Date de intrare

Fișierul `intervale.in` conține pe prima linie n și apoi n perechi de numere naturale pe câte o linie, separate prin spațiu, reprezentând capetele intervalelor.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `intervale.out` va conține pe câte o linie câte un interval, intervalele fiind ordonate crescător după numărul de numere prime pe care le conțin.

Exemplu

intervale.in	intervale.out
3 10 20 4 10 5 6	5 6 4 10 10 20

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 113 (col). Se dau n puncte în plan prin coordonatele lor. Determinați numărul maxim de puncte coliniare.

Cerință

Cunoscând coordonatele celor n puncte, determinați numărul maxim de puncte coliniare.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 300$;
- Coordonatele punctelor sunt numere naturale ≤ 90000.

Date de intrare

Fișierul `col.in` conține pe prima linie n, apoi pe liniile următoare coordonatele punctelor separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `col.out` va conține pe prima linie numărul cerut.

Exemplu

col.in	col.out
4 5 0 5 10 10 90 5 30	3

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 114 (jetoane). Se dau n jetoane pe care sunt scrise numerele $1, 2, \ldots, n$. Așezați în linie $[n/2]$ jetoane din cele date astfel încât numerele de pe acestea să fie în ordine crescătoare și să nu existe două jetoane consecutive cu numere prime.

Cerință

Cunoscând n, se cere să se determine toate modalitățile de așezare a $[n/2]$ jetoane cu condiția din enunț.

Restricții și precizări

$1 \leq n \leq 20$.

Date de intrare

Fișierul `jetoane.in` conține pe prima linie n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `jetoane.out` va conține pe câte o linie, cu spațiu între numere, variantele de așezare a jetoanelor cu restricția din enunț.

Exemplu

jetoane.in	jetoane.out
4	1 2 1 3 1 4 2 4 3 4

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 115 (modif). Se dă un număr natural n cu maxim 10 cifre. Definim operația **modif** ca fiind eliminarea din n a maxim 5 cifre astfel încât numărul rămas să fie nenul și divizibil cu 3.

Cerință

Pentru un număr n dat, determinați câte numere distincte se pot obține prin operația *modif*.

Restricții și precizări

$1 \leq n \leq 10^9$.

Date de intrare

Fișierul `modif.in` conține pe prima linie n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `modif.out` va conține numărul din cerință.

Exemplu

modif.in	modif.out	Explicație
1282	3	Numerele obținute prin operația *modif* sunt: 282, 12, 18.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasele a XI-a și a XII-a

I 116 (**produs**). Se dau două matrice pătratice de dimensiune n cu numere naturale. Determinați numerele prime din matricea produs.

Cerință

Cunoscând n și elementele celor două matrice, se cere să se determine numărul Nr de numere prime din matricea produs.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 20$;
- Numerele din matrice sunt ≤ 1000.

Date de intrare

Fișierul `produs.in` conține pe prima linie n, apoi elementele matricelor, linii după linii, pe fiecare linie numerele sunt separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `produs.out` va conține pe prima linie numărul Nr cerut în enunț.

Exemplu

produs.in	produs.out	Explicație
2 1 2 3 4 1 1 2 2	4	Matricea produs are elementele: 5 5 11 11 toate fiind numere prime.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Alexandru Ion Popescu, București

I 117 (**arbori**). Se dă un graf neorientat prin n numărul de noduri, m numărul de muchii și m perechi de noduri ce reprezintă muchiile. Se cere să se determine numărul de componente conexe din graf care sunt arbori.

Restricții și precizări

$n \leq 100$.

Date de intrare

Fișierul `arbori.in` conține pe prima linie n și m, separate prin spațiu, și pe următoarele m linii perechi de noduri, separate prin spațiu, ce reprezintă muchiile grafului.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `arbori.out` va conține pe prima linie numărul de componente conexe din graf care sunt arbori.

Exemplu

arbori.in	arbori.out	Explicație
9 7 4 8 1 5 2 8 3 9 8 6 3 7 9 7	2	Graful are trei componente conexe, generate de nodurile $\{1, 5\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{3, 7, 9\}$. Dintre acestea, doar primele două sunt arbori.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 118 (**lanturi**). Se dă un graf neorientat cu n noduri și m muchii. Pentru acest graf se dorește determinarea lanțurilor elementare de lungime maximă.

Cerință

Cunoscând n, m și cele m muchii, se cere să se determine numărul de lanțuri elementare de lungime maximă.

Restricții și precizări

$1 \leq n \leq 10$.

Date de intrare

Fișierul `lanturi.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu, apoi pe următoarele m linii nodurile muchiilor separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `lanturi.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

lanturi.in	lanturi.out	Explicație
5 3 1 2 2 4 2 5	2	Graful conține două lanțuri elementare de lungime maximă: (1, 2, 5) și (1, 2, 4)

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 119 (**cub perfect**). Se dau $n < m$, numere naturale. Se cere să se determine numărul Nr de submulțimi nevide ale mulțimii $\{n, n + 1, \ldots, m\}$ care au produsul un număr cub perfect.

Cerință

Cunoscând n și m, se cere să se determine Nr.

Restricții și precizări

$1 \leq n < m \leq 30$.

Date de intrare

Fișierul `cp.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `cp.out` va conține pe prima linie numărul Nr.

Exemplu

cp.in	cp.out	Explicație
2 8	3	Cele trei submulțimi sunt: $\{8\}, \{2,4\}, \{2,4,8\}$.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 120 (arbore). Se dă un arbore cu n noduri prin vectorul *tata*. Afișați nodurile arborelui parcurse în lățime, respectiv adâncime, pornind din fiecare nod.

Cerință

Cunoscând n și componentele vectorului *tata*, afișați nodurile arborelui parcurse în lățime, respectiv adâncime, pornind din fiecare nod.

Restricții și precizări

$1 \leq n \leq 1000$.

Date de intrare

Fișierul `arbore.in` conține pe prima linie n și pe linia a doua vectorul tată cu noduri separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `arbore.out` va conține $2n$ linii ce corespund parcurgerilor în lățime, respectiv adâncime din nodurile $1, 2, \ldots, n$.

Exemplu

arbore.in	arbore.out
4 0 1 1 2	1 2 3 4 1 2 4 3 2 1 4 3 2 1 3 4 3 1 2 4 3 1 2 4 4 2 1 3 4 2 1 3

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL